ALCUNE DISEGUAGLIANZE PER MEDIE DI CESÀRO SU SPAZI NORMATI.

Roberto D'Angiò

1. Introduzione.

Il Teorema 1 dimostra che per ogni successione limitata su uno spazio normato $(S, \|\bullet\|)$, ovvero per ogni successione

$$s^{(\nu)} \in S \qquad \nu = 1,2,\ldots \quad \left(\left\| s^{(\nu)} \right\| \le \mathcal{B} = \text{cost.} > 0\right),$$

la corrispondente successione delle medie di Cesàro (del primo ordine)

$$\sigma^{(n)} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)} / n \ \in S \quad n = 1,2,\ldots$$

è tale che valgono le diseguaglianze qui riportate il cui significato e rilevanza è più sotto illustrato:

$$\left\| \sigma^{(n)} \right\| \le \mathcal{B}, \quad \left\| \sigma^{(k)}_{(n+1)} \right\| \le \mathcal{B} \quad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\left\| \sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)} \right\| \le 2\mathcal{B} \quad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| \le \frac{2\mathcal{B}k}{n+k} \quad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| < \varepsilon \quad \forall n > \eta(\varepsilon) \quad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\eta(\varepsilon) = k\left(\varepsilon^{-1} 2\mathcal{B} - 1\right) \quad \varepsilon \in (0, \infty)$$

(dove $\sigma^{(k)}_{(n+1)}$, come si vedrà più avanti, è la media di Cesàro *troncata a sinistra di n termini* rispetto alla media di Cesàro $\sigma^{(n+k)}$). La prima diseguaglianza di cui sopra mostra che per ogni successione limitata su uno spazio normato $(S, \|\bullet\|)$ la corrispondente successione delle medie di Cesàro è anch'essa limitata e dalla medesima costante $\mathcal{B}$. Si tratta dunque della generalizzazione sugli spazi normati astratti della ben nota proprietà di *internalità* della media aritmetica sul

campo $\mathcal{R}$ dei numeri reali (per $\mathcal{R}$ v. p.es. in Nagumo (1930) la proprietà III). La penultima diseguaglianza, che discende dalle precedenti e da un'identità notevole (Lemma 1), non compare in letteratura nemmeno per il caso del campo $\mathcal{R}$ dei numeri reali (mentre l'identità da cui discende è, limitatamente ad $\mathcal{R}$, ben nota in letteratura v. p.es. in Nagumo (1930) la proprietà II, in Kolmogorov (1930) la proprietà IV e qui più sotto). La penultima diseguaglianza è in effetti una diseguaglianza notevole in quanto per n $\to \infty$ implica direttamente, come è immediato vedere, l'ultima diseguglianza che a sua volta mostra: (a) che, per ogni successione limitata su di uno spazio normato $(S, \|\bullet\|)$, la successione delle medie di Cesàro è una *successione di Cauchy*, Teorema 4(i), e dunque (b) che se inoltre lo spazio normato $(S, \|\bullet\|)$ è di Banach allora la successione delle medie di Cesàro è una successione *convergente in S*, Teorema 4(ii). Di quest'ultimo risultato, che è di evidente interesse matematico da vari punti di vista, qui ci si limita ad esplicitare, per brevità, solamente la rilevanza per la teoria della sommabilità delle serie su spazi di Banach, rilevanza che consiste ciò: che da tale risultato (Teorema 4(ii)) segue immediatamente che *ogni serie limitata su uno spazio di Banach è convergente nel senso di Cesàro-Hölder* (Teorema 5). A questo proposito va sottolineato che a ciò si perviene senza ricorrere ad alcun specifico risultato della teoria della sommabilità delle serie bensì esclusivamente per il tramite delle suddette diseguaglianze del Teorema 1. I Teoremi 2-3 applicano le diseguaglianze del Teorema 1 ai seguenti due casi, elementari e fondamentali, di spazi normati (di Banach e di Hilbert):

$$(S, \|\bullet\|) = (\mathcal{R}^m, \|\bullet\|_2), \quad (S, \|\bullet\|) = (\mathcal{C}^m, \|\bullet\|_2), \quad m = 1,2,\ldots$$

dove $\mathcal{R}$ è il campo reale, $\mathcal{C}$ è il campo complesso e $\|\bullet\|_2$ è la rispettiva norma euclidea. I Teoremi 2-3 dimostrano che in tali spazi la costante $\mathcal{B}$ di cui alle suddette diseguaglianze assume una precisa struttura ovvero è tale che nei due casi si ha rispettivamente

$$2\mathcal{B} = 2\,\|M\| \geq \|b - a\|$$

$$2\mathcal{B} = 2\,\|\mathcal{M}\| \geq \|\mathcal{D}\|$$

(dove M, a, b, $\mathcal{M}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^m$ sono definiti in modo appropriato). I Teoremi 2-3 dimostrano inoltre che le costanti alla destra delle due diseguaglianze di cui sopra sono le costanti migliori possibili nel senso usuale del termine ovvero che, con esse in luogo di $2\mathcal{B}$, le suddette diseguaglianze del Teorema 1 su tali spazi non sono ulteriormente migliorabili. Infine va qui segnalato che il Lemma 1 dimostra che per le medie di Cesàro su uno spazio normato vale la seguente identità

$$\sigma^{(n+k)} = \left(\sigma^{(n)} n + \sigma^{(k)}_{(n+1)} k\right)/(n+k)$$

che è notevole in quanto estende al caso di uno spazio normato astratto una proprietà della media aritmetica che è ricorrente in letteratura solo limitatamente al campo $\mathcal{R}$ dei numeri reali dove è nota anche come proprietà di (pseudo-) *associatività* della media aritmetica, v. p.es. in Nagumo (1930) la proprietà II e in Kolmogorov (1930) la proprietà IV.

2. Risultati e dimostrazioni.

In quanto segue $(S, \|\bullet\|)$ è uno spazio normato e su tale spazio viene considerata la successione

(1) $$s^{(\nu)} \in S \quad \nu = 1,2,\ldots$$

con la corrispondente successione delle medie di Cesàro (del primo ordine)

(2) $$\sigma^{(n)} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)} / n \in S \qquad n = 1,2,\ldots$$

La media di Cesàro *troncata a sinistra di n termini,* rispetto alla media di Cesàro (2) $\sigma^{(n+k)}$, è denotata dal simbolo $\sigma_{(n+1)}^{(k)}$ ed è definita come segue:

(3) $$\sigma_{(n+1)}^{(k)} \equiv \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s^{(\nu)} / k \in S \quad k = 1,2,\ldots \quad \left(\sigma_{(n+1)}^{(k)} \equiv 0 \quad k = 0\right)$$

dove la definizione (3) è in accordo con la (2) avendosi in particolare $\sigma^{(n)} = \sigma_{(1)}^{(n)}$ ed anche

(4) $$\sigma^{(n+k)} = \sum_{\nu=1}^{n+k} s^{(\nu)} / (n+k) = \sigma_{(1)}^{(n+k)} \quad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

Vale allora il seguente

TEOREMA 1.

Per ogni successione (1) *su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *ed ivi limitata, ovvero per la quale vale la diseguaglianza* (5) *seguente*

(5) $$\left\| s^{(\nu)} \right\| \le \mathcal{B} \quad \nu = 1,2,\ldots \quad (\mathcal{B} = \text{cost.} > 0),$$

la corrispondente successione (2) *delle medie di Cesàro è tale che valgono le diseguaglianze* (6)-(9) *e la* (10) *che seguono*:

(6) $$\left\| \sigma^{(n)} \right\| \le \mathcal{B}, \quad \left\| \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \le \mathcal{B} \qquad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

(7) $$\left\| \sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \le 2\mathcal{B} \qquad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

(8) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| \le \frac{2\mathcal{B}k}{n+k} \qquad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

(9) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| < \varepsilon \quad \forall n > \eta(\varepsilon) \quad k = 0,1,\ldots$$

dove in particolare si ha

(10) $$\eta(\varepsilon) = k\left(\varepsilon^{-1} 2\mathcal{B} - 1\right) \quad \varepsilon \in (0,\infty).$$

Dimostrazione. S*e la successione* (1) *è limitata sullo spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *allora dalle* (2)-(3), (5) *e la proprietà triangolare della norma si ottengono le due diseguaglianze* (6), *infatti*

$$\left\| \sigma^{(n)} \right\| = \left\| \sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)} \right\| / n \le \sum_{\nu=1}^{n} \left\| s^{(\nu)} \right\| / n \le \mathcal{B}$$

$$\left\| \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| = \left\| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s^{(\nu)} \right\| / k \le \sum_{\nu=n+1}^{n+k} \left\| s^{(\nu)} \right\| / k \le \mathcal{B}$$

Ne consegue allora che, per le diseguaglianze (6) *e per una ben nota proprietà della norma, si ha immediatamente la diseguaglianza* (7), *infatti*

$$\left\| \sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \le \left\| \sigma^{(n)} \right\| + \left\| \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \le 2\mathcal{B}.$$

Inoltre il **Lemma 1** *dimostra* (*come si vedrà più avanti*) *che per ogni successione* (1) *su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (2) *delle medie di Cesàro è tale che vale l'identità* (11) *seguente*

(11) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| = \frac{k}{n+k} \left\| \sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\|$$

Dall'identità (11) *e dalla diseguaglianza* (7) *segue allora subito la diseguaglianza* (8). *Infine, da quest'ultima diseguaglianza si ha immediatamente il risultato asintotico* (12) *seguente*

(12) $$\lim_{n\to\infty} \left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| = 0 \qquad k = 0,1,\ldots$$

che è la diseguaglianza (9) *per una qualche funzione* $\eta=\eta(\varepsilon)$, v. e.g. Trénoguine (1985) p. 52 e Knopp (1956) p. 44. *In effetti una tale funzione è data dalla* (10). *Infatti, come è immediato verificare per sostituzione, la* (10) *dà*

$$\frac{2\mathcal{B}k}{\eta + k} = \varepsilon, \quad \eta = \eta(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (0,\infty)$$

da cui segue ovviamente che la (10) *è tale che*

$$\frac{2\mathcal{B}k}{n+k} < \varepsilon \quad \forall n > \eta = \eta(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (0,\infty)$$

e dunque, per quest'ultimo risultato e per la (8), *la* (10) *soddisfa la diseguaglianza* (9) □

Resta dunque da dimostrare l'identità (11) di cui sopra, ovvero l'identità (15) del Lemma 1 qui sotto. Tale identità discende a sua volta dall'identità (13) del Lemma 1, identità quest'ultima che è notevole in quanto estende al caso di uno spazio normato astratto una proprietà della media aritmetica che ricorre in letteratura solo limitatamente al campo reale $\mathcal{R}$ dove è nota anche come proprietà di (pseudo-) *associatività* della media aritmetica, v. p.es. in Nagumo (1930) la proprietà II e in Kolmogorov (1930) la proprietà IV. Dimostriamo dunque il seguente

LEMMA 1.

Per ogni successione (1) *su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (2) *delle medie di Cesàro è tale che valgono le identità* (13)-(15) *seguenti*:

(13) $$\sigma^{(n+k)} = \left(\sigma^{(n)} n + \sigma^{(k)}_{(n+1)} k\right)/(n+k), \quad k = 0,1,\ldots$$

(14) $$\sigma^{(n)} - \sigma^{(n+k)} = \frac{k}{n+k}\left(\sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)}\right), \quad k = 0,1,\ldots$$

(15) $$\left\|\sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)}\right\| = \frac{k}{n+k}\left\|\sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)}\right\|, \quad k = 0,1,\ldots$$

Dimostrazione. *Per la* (2), *ovvero per la* (4), *ed inoltre per la linearità dello spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *e l'associatività dell'addizione negli spazi lineari si ha l'ovvia identità*

$$\sigma^{(n+k)} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s^{(\nu)}\right)/(n+k)$$

la quale, per le (2)-(3), *dà immediatamente l'identità* (13); *quest'ultima a sua volta dà l'ovvia identità*

$$\sigma^{(n)} - \sigma^{(n+k)} = \sigma^{(n)} - \left(\sigma^{(n)} n + \sigma^{(k)}_{(n+1)} k\right)/(n+k)$$

che, con ovvi passaggi, dà l'identità (14); *infine quest'ultima, in norma, dà immediatamente l'identità* (15) □

I Teoremi 2-3 che seguono tra breve applicano i risultati del Teorema 1 ai seguenti due casi, elementari e fondamentali, di spazi normati (di Banach e di Hilbert):

$$(S, \|\bullet\|) = (\mathcal{R}^m, \|\bullet\|_2), \quad (S, \|\bullet\|) = (\mathcal{C}^m, \|\bullet\|_2), \quad m = 1,2,\ldots$$

dove $\mathcal{R}$ è il campo reale, $\mathcal{C}$ è il campo complesso e $\|\bullet\|_2$ è la rispettiva norma euclidea. I Teoremi 2-3 dimostrano che in tali spazi la costante $\mathcal{B}$ che compare nelle diseguaglianze (5)-(9) e nella (10) del Teorema 1 assume una precisa struttura ovvero è tale che nei due casi si ha rispettivamente

$$2\mathcal{B} = 2\,\|M\| \geq \|b-a\|$$

$$2\mathcal{B} = 2\,\|\mathcal{M}\| \geq \|\mathcal{D}\|$$

(dove M, a, b, $\mathcal{M}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^m$ sono definiti in modo appropriato). I Teoremi 2-3 dimostrano inoltre che le costanti alla destra delle due diseguaglianze di cui sopra sono le costanti migliori possibili nel senso usuale del termine ovvero che, con esse in luogo di $2\mathcal{B}$, le diseguaglianze (7)-(9) e la (10) del Teorema 1 su tali spazi non sono ulteriormente migliorabili. Come è naturale, nel caso dei Teoremi 2-3 la notazione diviene più specifica e complessa rispetto a quella del tutto generale del Teorema 1 e tuttavia, come deve essere, essa è assolutamente corrispondente a quella di detto teorema. Per renderene più agevole la lettura, il Teorema 2 e la notazione ad esso relativa vengono qui preceduti da una tabella di raccordo fra le formule del Teorema 2 e quelle già viste del Teorema 1 (analogamente verrà fatto per il Teorema 3).

Teorema 1	(1)	(2)	(3)	(5)	—	—	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Teorema 2	(16)-(17)	(20)-(21)	(22)-(23)	(18)	(19)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)

Il Teorema 2, che verrà enunciato e dimostrato fra breve, considera dunque il seguente caso particolare del Teorema 1

$$(S, \|\bullet\|) = (\mathcal{R}^m, \|\bullet\|_2) \quad m = 1,2,\ldots$$

(dove $\mathcal{R}$ è il campo reale e $\|\bullet\|_2$ è la norma euclidea che scriveremo per semplicità $\|\bullet\|$) e considera inoltre la successione (1) ivi limitata. Il Teorema 2 mostra allora che su $S = \mathcal{R}^m$ la costante $\mathcal{B}$ del Teorema 1 assume una precisa struttura ovvero è tale che si ha

$$2\mathcal{B} = 2\,\|M\| \geq \|b-a\|$$

(dove M, a, $b \in \mathcal{R}^m$ sono definiti dalla (19) qui sotto). Il Teorema 2 mostra inoltre che la costante a destra della diseguaglianza di cui sopra è la costante migliore possibile per la quale le diseguaglianze (7)-(9) e la (10) del Teorema 1 valgono su $S = \mathcal{R}^m$. Ovviamente su $S = \mathcal{R}^m$ la successione (1) diventa la successione (16) seguente

(16) $$s^{(\nu)} \equiv \left(s_1^{(\nu)}, \ldots s_m^{(\nu)}\right) \in \mathcal{R}^m \quad \nu = 1,2,\ldots$$

dove il generico elemento del vettore (16) è

(17) $$s_r^{(\nu)} \in \mathcal{R} \quad r = 1,\ldots m\,.$$

La condizione di limitatezza (5) per la successione (16)-(17), nella forma più generale diventa allora

(18) $$a_r \le s_r^{(\nu)} \le b_r, \quad r = 1,\dots m, \quad M_r \equiv max\left(|a_r|,|b_r|\right) \ge \left|s_r^{(\nu)}\right|, \quad \nu = 1,2\dots$$

Tenendo conto della (18) definiamo anche

(19) $$M \equiv \left(M_1,\dots M_m\right),\ a \equiv \left(a_1,\dots a_m\right),\ b \equiv \left(b_1 \dots b_m\right), \quad M,a,b \in \Re^m$$

Inoltre su $S = \Re^m$ la successione (2) delle medie di Cesàro associata alla successione (16) diventa la successione (20) seguente

(20) $$\sigma^{(n)} \equiv \left(\sigma_1^{(n)},\dots \sigma_m^{(n)}\right) \in \Re^m \quad n = 1,2,\dots$$

dove il generico elemento del vettore (20) è

(21) $$\sigma_r^{(n)} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} s_r^{(\nu)} / n \in \Re \quad r = 1,\dots m$$

Corrispondentemente, su $S = \Re^m$ la media di Cesàro (3) *troncata a sinistra di n termini* rispetto alla media di Cesàro $\sigma^{(n+k)}$, denotata dal simbolo $\sigma_{(n+1)}^{(k)}$, risulta allora definita dalla formula (22) seguente:

(22) $$\sigma_{(n+1)}^{(k)} \equiv \left(\sigma_{(n+1),1}^{(k)},\dots, \sigma_{(n+1),m}^{(k)}\right) \in \Re^m \quad n = 1,2,\dots$$

dove il generico elemento del vettore (22) è

(23) $$\sigma_{(n+1),r}^{(k)} \equiv \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s_r^{(\nu)} / k \in \Re \quad r = 1,\dots m, \quad k = 1,2,\dots \quad \left(\sigma_{(n+1),r}^{(k)} \equiv 0 \quad k = 0\right).$$

Vale allora il seguente

TEOREMA 2. *Sia dato lo spazio normato*

(24) $$\left(S,\|\bullet\|\right) = \left(\Re^m,\|\bullet\|_2\right) \quad m = 1,2,\dots$$

(*dove* $\Re$ *è il campo reale e* $\|\bullet\|_2$ *è la norma euclidea che scriveremo per semplicità* $\|\bullet\|$) *e la successione* (16) *ivi limitata ovvero tale che vale la* (18). *Allora per la successione* (20) *delle medie di Cesàro valgono le diseguaglianze* (5)-(9) *e la* (10) *del* Teorema 1 *con*

(25) $$2\mathcal{B} = 2\,\|M\| \ge \|b - a\|$$

e le diseguaglianze (6)-(9) *e la* (10) *valgono altresì nelle rispettive versioni* (26)-(30) *seguenti che non sono migliorabili*:

(26) $$a_r \le \sigma_r^{(n)}, \sigma_{(n+1),r}^{(k)} \le b_r, \quad r = 1,\dots m, \quad n = 1,2,\dots \quad k = 1,2\dots$$

(27) $$\left\| \sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)} \right\| \le \|b-a\| \quad n=1,2,\ldots, \quad k=1,2,\ldots$$

(28) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| \le \frac{\|b-a\|\, k}{n+k} \qquad n=1,2,\ldots, \quad k=0,1,\ldots$$

(29) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| < \varepsilon \quad \forall n > \eta(\varepsilon) \quad k=0,1,\ldots$$

dove

(30) $$\eta(\varepsilon) = k\left(\varepsilon^{-1}\|b-a\| - 1\right) \quad \varepsilon \in (0,\infty).$$

Dimostrazione. *Dimostriamo prima la* (25) *e poi le* (26)-(30). [**Dimostrazione della (25)**]: *dalle* (16)-(17) e (18)-(19) *si ha*

(31) $$\left\| s^{(\nu)} \right\|^2 = \sum_{r=1}^{m} \left| s_r^{(\nu)} \right|^2 \le \sum_{r=1}^{m} M_r^2 = \|M\|^2 \quad \nu = 1,2,\ldots$$

e dunque

(32) $$\left\| s^{(\nu)} \right\| \le \|M\| \quad \nu = 1,2,\ldots$$

che è la diseguaglianza (5) *con*

$$\mathfrak{B} = \|M\|$$

la quale è l'eguaglianza nella (25)*; da quest'ultimo risultato e dal* Teorema 1, *consegue allora che nel caso della* (24) *valgono anche le diseguaglianze* (6)-(9) *e la* (10) *con* $\mathfrak{B} = \|M\|$ *come asserito*; *dimostriamo ora la diseguaglianza nella* (25); *dall'ovvia diseguaglianza su* $\mathfrak{R}$

(33) $$|b_r - a_r| \le |a_r| + |b_r| \le 2\, max(|a_r|, |b_r|) \quad r = 1,\ldots m$$

e dalle (18)-(19) *si ha che*

(34) $$\|b-a\|^2 = \sum_{r=1}^{m} |b_r - a_r|^2 \le 4 \sum_{r=1}^{m} M_r^2 = 4\,\|M\|^2$$

ovvero

(35) $$2\,\|M\| \ge \|b-a\|$$

che è la diseguaglianza nella (25). [**Dimostrazione delle (26)-(30)**]: *per le* (18), (21) *e* (23) *e per la proprietà di* internalità *della media aritmetica su* $\mathcal{R}$ (*v. e.g. in* Nagumo (1930) *la proprietà* III *che in* Kolmogorov (1930) *si deduce dalla* I *e* III) *segue immediatamente che la diseguaglianza* (26) *è vera e non è migliorabile; la* (26), *a sua volta, dà immediatamente*

(36) $$a_r - b_r \le \sigma_r^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1),r} \le b_r - a_r \quad (r = 1,\ldots m,\ n = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots)$$

ovvero

(37) $$\left|\sigma_r^{(n)} - \sigma_{(n+1),r}^{(k)}\right| \le b_r - a_r \quad r = 1,\dots m\,, \quad k = 1,2\dots$$

(*dove le* (36)-(37) *non sono migliorabili poiché la* (26) *non lo è*); *dalle* (37) *e* (20)-(23) *si ottiene allora la diseguaglianza*

(38) $$\left\|\sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)}\right\|^2 = \sum_{r=1}^m \left|\sigma_r^{(n)} - \sigma_{(n+1),r}^{(k)}\right|^2 \le \sum_{r=1}^m (b_r - a_r)^2 = \|b-a\|^2$$

(*che non è migliorabile poiché la* (37) *non lo è*); *dalla* (38) *e dalla* (25) *si ottiene così*

(39) $$\left\|\sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)}\right\| \le \|b-a\| \le 2\|M\| \qquad n = 1,2,\dots \quad k = 1,2,\dots$$

che è la diseguaglianza (27) *la quale non è migliorabile poiché la* (38) *non lo è. Allora, dalla diseguaglianza* (27), *dalle* (24)-(25) *e dall'identità* (15) *del* Lemma 1 *segue subito la diseguaglianza* (28) (*non migliorabile poiché la* (27) *non lo è*). *Infine, dalla diseguaglianza* (28) *si ha immediatamente il risultato asintotico seguente*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)}\right\| = 0 \qquad k = 0,1,\dots$$

che è la diseguaglianza (29) *per una qualche funzione* η=η(ε), *v. p. es.* Trénoguine (1985) p. 52, Knopp (1956) p. 44. *In effetti una tale funzione è data dalla* (30) *con la quale la diseguaglianza* (29) *non è migliorabile. Infatti, come è immediato verificare per sostituzione, la funzione* (30) *dà l'identità*

$$\frac{\|b-a\|\,k}{\eta + k} = \varepsilon, \quad \eta = \eta(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (0,\infty)$$

da cui si ha che la funzione (30) *è tale che vale la diseguaglianza seguente*

$$\frac{\|b-a\|\,k}{n + k} < \varepsilon \quad \forall n > \eta = \eta(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (0,\infty)$$

e dunque da quest'ultima diseguaglianza, dall'identità precedente e dalla diseguaglianza (28), *segue che la diseguaglianza* (29) *è verificata con la funzione* (30) *con la quale non è migliorabile* □

Il Teorema 3, che verrà enunciato e dimostrato fra breve, considera il seguente caso particolare del Teorema 1

$$(S, \|\bullet\|) = (\mathbb{C}^m, \|\bullet\|_2) \quad m = 1,2,\dots$$

(dove $\mathbb{C}$ è il campo complesso e $\|\bullet\|_2$ è l'appropriata norma euclidea che scriveremo per semplicità $\|\bullet\|$ e che denoterà anche la norma euclidea su $\mathbb{R}^m$) e considera inoltre la successione

(1) ivi limitata. Il Teorema 3 mostra allora che su $S = \mathcal{C}^m$ la costante $\mathcal{B}$ del Teorema 1 assume una precisa struttura ovvero è tale che si ha

$$2\mathcal{B} = 2\,\|\mathcal{M}\| \geq \|\mathcal{D}\|$$

(dove $\mathcal{M}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^m$ sono definiti dalla (45) qui sotto). Il Teorema 3 mostra inoltre che la costante a destra della diseguaglianza di cui sopra è la costante migliore possibile per la quale le diseguaglianze (7)-(9) e la (10) del Teorema 1 valgono su $S = \mathcal{C}^m$. Come è naturale, nel caso del Teorema 3 la notazione diviene più specifica e complessa rispetto a quella del tutto generale del Teorema 1. Per renderene più agevole la lettura, il Teorema 3 e la notazione ad esso relativa vengono qui preceduti da una tabella di raccordo fra le formule del Teorema 3 e quelle già viste dei Teoremi 1-2.

Teorema 1	(1)	(2)	(3)	(5)	—	—	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Teorema 2	(16)-(17)	(20)-(21)	(22)-(23)	(18)	(19)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)
Teorema 3	(40)-(41)	(46)-(47)	(50)-(51)	(42)	(43)	(55)	(56)	(57)	(58)	(59)	(60)

Ovviamente su $S = \mathcal{C}^m$ la successione (1) diventa la successione (40) seguente

(40) $$z^{(\nu)} \equiv \left(z_1^{(\nu)}, \ldots z_m^{(\nu)}\right) \in \mathcal{C}^m \quad \nu = 1,2,\ldots$$

dove il generico elemento del vettore (40) è

(41) $$z_t^{(\nu)} \equiv s_{t1}^{(\nu)} + i\, s_{t2}^{(\nu)} \in \mathcal{C}, \quad s_t^{(\nu)} \equiv \left(s_{t1}^{(\nu)},\, s_{t2}^{(\nu)}\right) \in \mathcal{R}^2 \quad t = 1,\ldots m\,.$$

La condizione di limitatezza (5) per la successione (40)-(41), nella forma più generale diventa allora

(42) $$a_{tr} \leq s_{tr}^{(\nu)} \leq b_{tr},\, r = 1,2, \quad M_{tr} \equiv max\left(|a_{tr}|, |b_{tr}|\right) \geq \left|s_{tr}^{(\nu)}\right|,\, \nu = 1,2,\ldots$$

Tenendo conto della (42), definiamo anche i vettori

(43) $$M_t \equiv (M_{t1}, M_{t2}),\; a_t \equiv (a_{t1}, a_{t2}),\; b_t \equiv (b_{t1}, b_{t2}),\; M_t, a_t, b_t \in \mathcal{R}^2$$

(44) $$D_{tr} \equiv b_{tr} - a_{tr} \quad r = 1,2, \quad D_t \equiv (D_{t1}, D_{t2}) \in \mathcal{R}^2$$

(45) $$\mathcal{M} \equiv \left(\|M_1\|, \ldots \|M_m\|\right), \quad \mathcal{D} \equiv \left(\|D_1\|, \ldots \|D_m\|\right), \quad \mathcal{M}, \mathcal{D} \in \mathcal{R}^m\,.$$

Inoltre su $S = \mathcal{C}^m$ la successione (2) delle medie di Cesàro associata alla successione (40) diventa allora la successione (46) seguente

(46) $$\sigma^{(n)} \equiv \left(\sigma_1^{(n)}, \ldots \sigma_m^{(n)}\right) \in \mathcal{C}^m \quad n = 1,2,\ldots$$

dove il generico elemento del vettore (46) è

(47) $$\sigma_t^{(n)} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} z_t^{(\nu)} / n \in \mathcal{C} \quad t = 1,\ldots m$$

che, per le (40)-(41), si scrive anche

(48) $$\sigma_t^{(n)} = \xi_{t1}^{(n)} + i\, \xi_{t2}^{(n)} \in \mathcal{C} \quad t = 1,\ldots m$$

dove

(49) $$\xi_{tr}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} s_{tr}^{(\nu)} / n \in \mathcal{R} \quad r = 1,2, \quad \xi_t^{(n)} \equiv \left(\xi_{t1}^{(n)}, \xi_{t2}^{(n)}\right) \in \mathcal{R}^2$$

Corrispondentemente su $S = \mathcal{C}^m$ la media di Cesàro (3) *troncata a sinistra di n termini* rispetto alla media di Cesàro $\sigma^{(n+k)}$, denotata dal simbolo $\sigma_{(n+1)}^{(k)}$, risulta allora definita dalla formula (50) seguente:

(50) $$\sigma_{(n+1)}^{(k)} \equiv \left(\sigma_{(n+1),1}^{(k)}, \ldots, \sigma_{(n+1),m}^{(k)}\right) \in \mathcal{C}^m \quad n = 1,2,\ldots$$

dove il generico elemento del vettore (50) è

(51) $$\sigma_{(n+1),t}^{(k)} \equiv \sum_{\nu=n+1}^{n+k} z_t^{(\nu)} / k \in \mathcal{C} \quad t = 1,\ldots m$$

che, analogamente a quanto visto nel caso della (47), per le (40)-(41), si scrive anche

(52) $$\sigma_{(n+1),t}^{(k)} = \xi_{(n+1),t1}^{(k)} + i\, \xi_{(n+1),t2}^{(k)} \in \mathcal{C} \quad t = 1,\ldots m$$

dove

(53) $$\xi_{(n+1),tr}^{(k)} \equiv \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s_{tr}^{(\nu)} / k \in \mathcal{R} \quad r = 1,2, \quad \xi_{(n+1),t}^{(k)} \equiv \left(\xi_{(n+1,)t1}^{(k)}, \xi_{(n+1),t2}^{(k)}\right) \in \mathcal{R}^2 .$$

Vale allora il seguente

TEOREMA 3. *Sia dato lo spazio normato*

(54) $$(S, \|\bullet\|) = \left(\mathcal{C}^m, \|\bullet\|\right) \quad m = 1,2,\ldots$$

(*dove* $\mathcal{C}$ *è il campo complesso e* $\|\bullet\|_2$ *è l'appropriata norma euclidea che scriveremo per semplicità* $\|\bullet\|$ *e che denoterà anche la norma euclidea su* $\mathcal{R}^m$) *e la successione* (40) *ivi limitata ovvero tale che vale la* (42). *Allora per la successione* (46) *delle medie di Cesàro valgono le diseguaglianze* (5)-(9) *e la* (10) *del* Teorema 1 *con*

(55) $$2\mathcal{B} = 2\,\|\mathcal{M}\| \geq \|\mathcal{D}\|$$

e le diseguaglianze (6)-(9) *e la* (10) *valgono altresì nelle rispettive versioni* (56)-(60) *seguenti che non sono migliorabili*:

(56) $$a_{tr} \le \xi_{tr}^{(n)},\ \xi_{(n+1),tr}^{(k)} \le b_{tr},\quad \left(r = 1,2,\ t = 1,\dots m,\ n = 1,2\dots,\ k = 1,2\dots\right)$$

(57) $$\left\| \sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \le \|\mathfrak{D}\| \quad n = 1,2,\dots,\quad k = 1,2,\dots$$

(58) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| \le \frac{\|\mathfrak{D}\|\, k}{n+k} \qquad n = 1,2,\dots,\quad k = 0,1,\dots$$

(59) $$\left\| \sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)} \right\| < \varepsilon \quad \forall n > \eta(\varepsilon) \quad k = 0,1,\dots$$

dove

(60) $$\eta(\varepsilon) = k\left(\varepsilon^{-1}\|\mathfrak{D}\| - 1\right) \quad \varepsilon \in (0,\infty).$$

Dimostrazione. *Dimostriamo prima la* (55) *e poi le* (56)-(60). [**Dimostrazione della (55)**]: *dalle* (40)-(41) *e* (42)-(43) *si ottiene*

(61) $$\left|z_t^{(\nu)}\right|^2 = \left\| s_t^{(\nu)} \right\|^2 = \sum_{r=1}^{2} \left|s_{tr}^{(\nu)}\right|^2 \le \sum_{r=1}^{2} M_{tr}^2 = \|M_t\|^2 \quad t = 1,\dots m,\ \nu = 1,2,\dots$$

la quale, per le (40)-(41) *e la* (45)*, dà*

(62) $$\left\| z^{(\nu)} \right\|^2 = \sum_{t=1}^{m} \left|z_t^{(\nu)}\right|^2 \le \sum_{t=1}^{m} \|M_t\|^2 = \|\mathfrak{M}\|^2 \quad \nu = 1,2,\dots$$

e dunque dalla (62) *si ottiene*

(63) $$\left\| z^{(\nu)} \right\| \le \|\mathfrak{M}\| \quad \nu = 1,2,\dots$$

che è la diseguaglianza (5) *con*

$$\mathfrak{B} = \|\mathfrak{M}\|$$

la quale è l'eguaglianza nella (55)*; da quest'ultimo risultato e dal* Teorema 1, *consegue allora che nel caso della* (54) *valgono anche le diseguaglianze* (6)-(9) *e la* (10) *con* $\mathfrak{B} = \|\mathfrak{M}\|$ *come asserito*; *dimostriamo ora la diseguaglianza nella* (55); *dall'ovvia diseguaglianza su* $\mathfrak{R}$

$$|b_{tr} - a_{tr}| \le |a_{tr}| + |b_{tr}| \le 2\max\left(|a_{tr}|, |b_{tr}|\right) \quad r = 1,2$$

e dalle (42)-(44) *si ottiene*

$$\|D_t\|^2 = \|b_t - a_t\|^2 = \sum_{r=1}^{2} |b_{tr} - a_{tr}|^2 \le 4\sum_{r=1}^{2} M_{tr}^2 = 4\|M_t\|^2;$$

inoltre da quest'ultimo risultato e dalle (44)-(45) *si ha*

(64) $$\|\mathfrak{D}\|^2 = \sum_{t=1}^{m} \|D_t\|^2 \le 4\sum_{t=1}^{m} \|M_t\|^2 = 4\|\mathfrak{M}\|^2$$

e dunque

$$2\|\mathfrak{M}\| \ge \|\mathfrak{D}\|$$

che è la diseguaglianza nella (55). [**Dimostrazione delle (56)-(60)**]: *per le* (42), (49) *e* (53) *e per la proprietà di* internalità *della media aritmetica su* $\mathfrak{R}$ (*v. e.g. in* Nagumo (1930) *la proprietà* III *che in* Kolmogorov (1930) *si deduce dalla* I *e* III) *segue immediatamente che la diseguaglianza* (56) *è vera e non è migliorabile; la* (56), *a sua volta, dà immediatamente*

(65) $a_{tr} - b_{tr} \le \xi_{tr}^{(n)} - \xi_{(n+1),tr}^{(k)} \le b_{tr} - a_{tr} \quad (r = 1,2,\ t = 1,\ldots m,\ n = 1,2\ldots,\ k = 1,2\ldots)$

ovvero

(66) $$\left|\xi_{tr}^{(n)} - \xi_{(n+1),tr}^{(k)}\right| \le b_{tr} - a_{tr} \quad (r = 1,2,\ t = 1,\ldots m,\ n = 1,2\ldots,\ k = 1,2\ldots)$$

(*dove le* (65)-(66) *non sono migliorabili poiché la* (56) *non lo è*); *allora dalle* (66) *e* (44) e *dalle* (48) e (52) *si ottiene*

(67) $$\left|\sigma_t^{(n)} - \sigma_{(n+1),t}^{(k)}\right|^2 = \sum_{r=1}^{2}\left|\xi_{tr}^{(n)} - \xi_{(n+1),tr}^{(k)}\right|^2 \le \sum_{r=1}^{2}\left(b_{tr} - a_{tr}\right)^2 = \|D_t\|^2;$$

(*dove la* (67) *non è migliorabile poiché la* (66) *non lo è*); *dalle* (67), (45)-(46) e (50) *si ottiene così*

(68) $$\left\|\sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)}\right\|^2 = \sum_{t=1}^{m}\left|\sigma_t^{(n)} - \sigma_{(n+1),t}^{(k)}\right|^2 \le \sum_{t=1}^{m}\|D_t\|^2 = \|\mathfrak{D}\|^2$$

(*dove la* (68) *non è migliorabile poiché la* (67) *non lo è*); *dalle* (68) *e* (55) *allora si ha*

(69) $$\left\|\sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)}\right\| \le \|\mathfrak{D}\| \le 2\|\mathfrak{M}\| \quad (n = 1,2\ldots,\ k = 1,2\ldots)$$

che è la diseguaglianza (57) *che non è migliorabile poiché la* (68) *non lo è. Allora, dalla diseguaglianza* (57), *dalle* (54)-(55) *e dall'identità* (15) *del* Lemma 1 *segue subito la diseguaglianza* (58) (*non migliorabile poiché la* (57) *non lo è*). *Infine, dalla diseguaglianza* (58) *si ha immediatamente il risultato asintotico seguente*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)}\right\| = 0 \qquad k = 0,1,\ldots$$

che è la diseguaglianza (59) *per una qualche funzione* η=η(ε), *v. p. es.* Trénoguine (1985) p. 52, Knopp (1956) p. 44, Svesnikov-Tichonov (1984) p. 18. *In effetti una tale funzione è data dalla* (60) *con la quale la diseguaglianza* (59) *non è migliorabile. Infatti, come è immediato verificare per sostituzione, la funzione* (60) *dà l'identità*

$$\frac{\|\mathfrak{D}\|\,k}{\eta + k} = \varepsilon, \quad \eta = \eta(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (0,\infty)$$

da cui si ha che la funzione (60) *è tale che vale la diseguaglianza seguente*

$$\frac{\|\mathfrak{D}\|\,k}{n + k} < \varepsilon \quad \forall n > \eta = \eta(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (0,\infty)$$

e dunque da quest'ultima diseguaglianza, dall'identità precedente e dalla diseguaglianza (58), *segue che la diseguaglianza* (59) *è verificata con la funzione* (60) *con la quale non è migliorabile* □

3. Un'applicazione delle diseguaglianze alla sommabilità delle serie.

Il Teorema 5 dà un'applicazione delle diseguaglianze del Teorema 1 alla teoria della sommabilità delle serie su spazi normati astratti ed in particolare su spazi di Banach. Come si vedrà, tale teorema discende direttamente dal Teorema 4 seguente il quale non fa riferimento ad alcun specifico risultato della teoria della sommabilità delle serie bensì è immediata conseguenza delle diseguaglianze del Teorema 1. Nel caso dei Teoremi 4-5 la successione (1) considerata dal Teorema 1 diviene la seguente successione (70), limitata, delle somme parziali

(70) $$s^{(\nu)} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} x_h \in S \quad \nu = 1,2,\ldots \quad \left(\left\| s^{(\nu)} \right\| \leq \mathcal{B} = \text{cost.} > 0\right)$$

della serie

(71) $$\sum_{h=1}^{\infty} x_h \quad \left(x_h \in S,\ h = 1,2,\ldots\right)$$

serie che diremo limitata in quanto è limitata la successione (70) delle sue somme parziali.

Vale allora il seguente

TEOREMA 4.

(i) *Per ogni serie* (71) *limitata su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (2) *delle medie di Cesàro del primo ordine è una successione di Cauchy.*

(ii) *Per ogni serie* (71) *limitata su uno spazio di Banach* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (2) *delle medie di Cesàro del primo ordine è una successione convergente in S.*

Dimostrazione. **(i)**: *risulta immediatamente dalla diseguaglianza* (9) *e la* (10) *del* Teorema 1 *ovvero dalla* (12), e.g. Trénoguine (1985) p. 52 e Knopp (1956) p. 44. **(ii)**: *se lo spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *è spazio di Banach, allora, per la proposizione* (i) *di questo* Teorema *e per la definizione stessa di spazio di Banach* (Banach (1932) pp. 9 e 53), *la successione* (2) *delle medie di Cesàro del primo ordine è successione convergente in S* □

La serie (71) si dice che è "(C,1)-convergente" in S se è ivi convergente la corrispondente successione (2) delle medie di Cesàro (del primo ordine). Il termine "(H,1)-convergente" ha il

medesimo significato poiché, come è noto, le medie del primo ordine di E. Cesàro e O. Hölder coincidono.

Vale allora il seguente

TEOREMA 5.

(i) *Ogni serie* (71) *limitata su uno spazio di Banach* $(S,\|\bullet\|)$ *è ivi* (C,1)-(H,1)-*convergente.*

(ii) *Ogni serie* (71) *limitata su uno spazio di Banach* $(S,\|\bullet\|)$ *è ivi* (C,α)-(H,α)-*convergente* (α=2,3…).

Dimostrazione. **(i)**: *per il* Teorema 4(ii) *la serie* (71) *è, per definizione,* (C,1)-*convergente in S; inoltre, come è noto, le medie del primo ordine di Cesàro e di Hölder sono entrambe date dalla* (2), *e dunque la serie* (71) *è anche* (H,1)-*convergente in S.* **(ii)**: *in primo luogo, v. p.es.* Zygmund (1959) Teorema 1.21 p. 77, *è noto il risultato* (r1) *per cui se una serie su* $\mathcal{C}$ *o* $\mathcal{R}$ *è* (C,1)-*convergente allora è anche* (C,α)-*convergente* (α=2,3…); *in secondo luogo, v. p.es.* Stromberg (1981) pp. 489-490, *è noto il risultato* (r2) *per cui se una serie su* $\mathcal{C}$ *o* $\mathcal{R}$ *è* (C,α)-*convergente* (α=1,2,3…) *allora è anche* (H,α)-*convergente e viceversa; ora, i risultati* (r1)- (r2) *si basano soltanto su proprietà che* $\mathcal{C}$ *ed* $\mathcal{R}$ (*in quanto spazi di Banach*) *hanno in comune con lo spazio di Banach astratto* $(S,\|\bullet\|)$ *per il quale, dunque,* (r1)-(r2) *valgono allo stesso modo* □

Bibliografia.

Banach, S.: 1932, *Théorie des Opérations Linéaires*, Hafner, New York.

Kolmogorov, A. N.: 1930, *Sur la Notion de la Moyenne,* Atti R. A. Lincei (6), 12, pp. 388-391.

Knopp, K.: 1956, *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York.

Nagumo, S.: 1930, *Über eine Klasse der Mittelwerte,* Japaneese J. of Math., (7), 7, pp. 72-79.

Stromberg, K. R.: 1981, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Pacific Grove.

Svesnikov, A. G, Tichonov, A. N.: 1984, *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*, MIR, Mosca.

Trénoguine, V.: 1985, *Analyse Fonctionnelle*, MIR, Moscou.

Zygmund, A.: 1959, *Trigonometric Series,* Cambridge University Press, Cambridge.