SULLE MEDIE DI CESÀRO IN SPAZI DI BANACH.

Roberto D'Angiò

1. Introduzione.

I Lemmi 1-3 su cui si articola la dimostrazione del Teorema 1 (qui sotto riportato) danno essenzialmente proprietà delle medie di Cesàro su spazi di Banach astratti e benché non utilizzino alcun risultato della teoria della sommabilità delle serie, ciononostante implicano risultati che rientrano a tutti gli effetti in tale teoria, ovvero il seguente

> **TEOREMA 1. (i)** *Ogni serie limitata su uno spazio di Banach è ivi* (C,1)-(H,1)-*convergente.* **(ii)** *Ogni serie limitata su uno spazio di Banach è ivi* (C,α)-(H,α)-*convergente* (α=2,3…)□ (dove, come è noto, "C" sta per E. Cesàro e "H" per O. Hölder).

Si comprende dunque sin d'ora che, per quanto sopra detto, i Lemmi 1-3, su cui si articola la dimostrazione del Teorema 1, sono di autonomo interesse matematico e ciò anche perché danno proprietà delle medie di Cesàro su spazi di Banach astratti o che non sono ricorrenti nella letteratura esistente o che, quando lo sono, lo sono soltanto limitatamente al ristretto ambito del campo reale.

Nella Sezione 2 seguente è data innanzitutto la dimostrazione del Teorema 1, viene poi data la dimostrazione del Lemma 3 cui la dimostrazione del Teorema 1 fa riferimento nonché, successivamente, la dimostrazione del Lemma 2 cui il precedente Lemma 3 rimanda e così di seguito procedendo a ritroso fino alla dimostrazione del Lemma 1 (ovviamente il lettore che lo desideri può seguire il percorso inverso). L'Osservazione alla fine della Sezione 2 collega le proprietà delle medie di Cesàro su spazi di Banach astratti che via via emergono in modo del tutto

naturale dalle dimostrazioni di tali Lemmi, con le corrispondenti proprietà sul campo reale e complesso.

2. Risultati e dimostrazioni.

In quanto segue $(S, \|\bullet\|)$ è uno spazio normato ed in particolare uno spazio di Banach astratto. Su tale spazio viene considerata la serie

(1) $$\sum_{h=1}^{\infty} x_h \qquad x_h \in S \qquad h = 1,2,\ldots$$

nonché la corrispondente successione delle somme parziali

(2) $$s^{(\nu)} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} x_h \qquad \nu = 1,2,\ldots$$

e la corrispondente successione delle medie di Cesàro (del primo ordine)

(3) $$\sigma^{(n)} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)} / n \qquad n = 1,2,\ldots$$

La serie (1) si dice che è "(C,1)-convergente" in S se è ivi convergente la successione (3) delle medie di Cesàro (del primo ordine). Inoltre diremo che la serie (1) è limitata su S se è ivi limitata la successione (2) delle sue somme parziali, ovvero se

$$\left\| s^{(\nu)} \right\| \le \mathcal{B} \qquad \nu = 1,2,\ldots \qquad \mathcal{B} = \text{cost.} > 0 \,.$$

Vale allora il seguente

TEOREMA 1.

(i) *Ogni serie* (1) *limitata su uno spazio di Banach* $(S, \|\bullet\|)$ *è ivi* (C,1)-(H,1)-*convergente.*

(ii) *Ogni serie* (1) *limitata su uno spazio di Banach* $(S, \|\bullet\|)$ *è ivi* (C,α)-(H,α)-*convergente* (α=2,3…).

Dimostrazione. **(i)**: *il* **Lemma 3** (*per il tramite, come si vedrà, di una diseguaglianza notevole*) *dimostra che se la serie* (1) *è limitata e lo spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *è uno spazio di Banach, allora la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è convergente in S; ne consegue allora che la serie* (1) *è, per definizione,* (C,1)-*convergente in S; inoltre, come è noto, le medie del primo ordine di Cesàro e di Hölder sono entrambe date dalla* (3)*, e dunque la serie* (1) *è anche* (H,1)-*convergente in S.* **(ii)**: *in primo luogo, v. p.es.* Zygmund (1959) Teorema 1.21 p. 77, *è noto il risultato* (r1) *per cui se una serie su* $\mathcal{C}$ *o* $\mathcal{R}$ (*campo complesso o reale*) *è* (C,1)-*convergente allora è anche* (C,α)-*convergente* (α=2,3…); *in secondo luogo, v. p.es.* Stromberg (1981) pp. 489-490, *è noto il risultato* (r2) *per cui se una serie su* $\mathcal{C}$ *o* $\mathcal{R}$ *è* (C,α)-

convergente (α=1,2,3…) *allora è anche* (H,α)-*convergente e viceversa; ora, i risultati* (r1)- (r2) *si basano soltanto su proprietà che* $\mathcal{C}$ *ed* $\mathcal{R}$ (*in quanto spazi di Banach*) *hanno in comune con gli spazi di Banach astratti per i quali dunque* (r1)-(r2) *valgono allo stesso modo* □

Come già anticipato all'inizio della dimostrazione del Teorema 1 le conclusioni dello stesso dipendono dal Lemma 3 in cui è utilizzata una diseguaglianza notevole (v. la diseguaglianza (4) qui sotto) cui soddisfano i termini della successione (3) delle medie di Cesàro per serie (1) limitate su uno spazio normato ed in particolare di Banach. Tale diseguaglianza sembra non ricorre affatto nella letteratura esistente in materia di medie di Cesàro (o di medie aritmetiche), neppure limitatamente al ristretto ambito del campo reale. Per contro, come si vedrà, detta diseguaglianza discende proprio da proprietà delle medie di Cesàro su spazi di Banach e, più in generale, su spazi normati, le quali, sia pure limitatamente al ristretto ambito del campo reale, sono invece ben note in letteratura, v. p.es. Kolmogorov (1930), Nagumo (1930). Il ruolo fondamentale che tale diseguaglianza ha (tramite il Lemma 3) per le conclusioni del Teorema 1 risulterà evidente dalla dimostrazione del seguente

LEMMA 3.

(i) *Per ogni serie* (1) *limitata su uno spazio normato* $(S,\|\bullet\|)$ *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è una successione di Cauchy.*

(ii) *Per ogni serie* (1) *limitata su uno spazio di Banach* $(S,\|\bullet\|)$ *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è una successione convergente in S.*

Dimostrazione. **(i)**: *il* **Lemma 2** *dimostra che per ogni serie* (1) *limitata su uno spazio normato* $(S,\|\bullet\|)$ *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è tale che vale la diseguaglianza*

$$\left\|\sigma^{(n+k)}-\sigma^{(n)}\right\| \le \frac{k2\mathcal{B}}{n+k} \quad (n=1,2,\ldots\ k=0,1,\ldots\ \mathcal{B}=\text{cost.}>0). \tag{4}$$

Dalla diseguaglianza (4) *segue allora immediatamente il risultato asintotico* (5)

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\sigma^{(n+k)}-\sigma^{(n)}\right\| = 0 \qquad k=0,1,\ldots \tag{5}$$

che mostra che la successione (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è, per definizione, una successione di Cauchy,* e.g. Trénoguine (1985) p. 52 e Knopp (1956) p. 44. **(ii)**: *se lo spazio normato* $(S,\|\bullet\|)$ *è spazio di Banach, allora, per la proposizione* **(i)** *di questo* Lemma *e per la*

definizione stessa di spazio di Banach (Banach (1932) pp. 9 e 53) *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è allora successione convergente in S* □

Da quanto precede è dunque evidente il ruolo fondamentale che la diseguaglianza (4) ha, tramite il Lemma 3, per le conclusioni del Teorema 1. Siamo così giunti alla dimostrazione di detta diseguaglianza; la sua dimostrazione richiede che si introduca la nozione di *media di Cesàro troncata a sinistra di n termini rispetto a* $\sigma^{(n+k)}$, denotata dal simbolo $\sigma^{(k)}_{(n+1)}$ e definita come segue:

(6) $$\sigma^{(k)}_{(n+1)} \equiv \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s^{(\nu)}/k \qquad k=1,2,\ldots, \qquad \sigma^{(k)}_{(n+1)} \equiv 0 \qquad k=0$$

dove la definizione (6) è coerente con la (3) avendosi in particolare $\sigma^{(n)} = \sigma^{(n)}_{(1)}$ ed anche

(7) $$\sigma^{(n+k)} = \sigma^{(n+k)}_{(1)}, \quad \sigma^{(n+k)} = \sum_{\nu=1}^{n+k} s^{(\nu)}/(n+k) \qquad n=1,2,\ldots$$

La dimostrazione della diseguaglianza (4) (v. (10) qui sotto) utilizzata nel Lemma 3 precedente (Lemma a sua volta utilizzato nella dimostrazione del Teorema 1) è allora data dal seguente

LEMMA 2.

Per ogni serie (1) *limitata su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è tale che valgono la seguente identità* (8) *e le due successive diseguaglianze* (9)-(10)*:*

(8) $$\left\|\sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)}\right\| = \frac{k}{n+k}\left\|\sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)}\right\|$$

(9) $$\left\|\sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)}\right\| \le 2\mathcal{B} \qquad \mathcal{B} = \text{cost.} > 0$$

(10) $$\left\|\sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)}\right\| \le \frac{k2\mathcal{B}}{n+k} \qquad n=1,2,\ldots \quad k=0,1,\ldots$$

Dimostrazione. *Il* **Lemma 1** *dimostra che per ogni serie* (1) *limitata su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è tale che vale la seguente identità* (11)

(11) $$\sigma^{(n)} - \sigma^{(n+k)} = \frac{k}{n+k}\left(\sigma^{(n)} - \sigma^{(k)}_{(n+1)}\right)$$

che in norma dà immediatamente la (8); *inoltre il* **Lemma 1** *dimostra che se la serie* (1) *è limitata su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *ovvero se la successione* (2) *delle somme parziali è tale che*

$$\left\| s^{(\nu)} \right\| \leq \mathcal{B} \qquad \nu = 1,2,\ldots \qquad \mathcal{B} = \text{cost.} > 0$$

allora per le medie di Cesàro (3) *e* (6) *valgono le seguenti diseguaglianze* (12)

$$\left\| \sigma^{(n)} \right\| \leq \mathcal{B}, \quad \left\| \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \leq \mathcal{B}, \quad n = 1,2,\ldots, k = 0,1,\ldots \tag{12}$$

Ne consegue allora che, per le diseguaglianze (12) *e per una ben nota proprietà della norma, si ha immediatamente la* (9), *infatti*

$$\left\| \sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \leq \left\| \sigma^{(n)} \right\| + \left\| \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right\| \leq 2\mathcal{B}.$$

Infine dalla (9) *e dalla* (8) *segue immediatamente la diseguaglianza* (10) □

Per completare la sequenza dei risultati su cui si fonda la dimostrazione del Teorema 1 restano dunque soltanto da dimostrare l'identità (11) e le diseguaglianze (12) impiegate nel Lamma 2 sopra. Le diseguaglianze (12) e l'identità da cui si ottiene la (11), come si vedrà (v. l'Osservazione alla fine di questa Sezione), sono in effetti le versioni su spazi di Banach e, più in generale, su spazi normati, di proprietà delle medie di Cesàro che, sia pure limitatamente al ristretto ambito del campo reale, sono ben note in letteratura, v. p.es. Kolmogorov (1930), Nagumo (1930). Le dimostrazioni dell'identità (11) (v. formula (14) qui sotto) e delle diseguaglianze (12) (v. formula (16) qui sotto) sono date dal seguente ed ultimo

LEMMA 1.

Per ogni serie (1) *su uno spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *la successione* (3) *delle medie di Cesàro del primo ordine è tale che valgono le seguenti due identità:*

$$\sigma^{(n+k)} = \left(\sigma^{(n)} n + \sigma_{(n+1)}^{(k)} k \right) / (n+k) \tag{13}$$

$$\sigma^{(n)} - \sigma^{(n+k)} = \frac{k}{n+k} \left(\sigma^{(n)} - \sigma_{(n+1)}^{(k)} \right) \tag{14}$$

ed inoltre se la serie (1) *è limitata ovvero se la successione* (2) *delle somme parziali è tale che*

$$\left\| s^{(\nu)} \right\| \leq \mathcal{B} \qquad \nu = 1,2,\ldots \qquad \mathcal{B} = \text{cost.} > 0 \tag{15}$$

allora valgono le seguenti due diseguaglianze:

(16) $$\left\|\sigma^{(n)}\right\| \le \mathcal{B}, \quad \left\|\sigma^{(k)}_{(n+1)}\right\| \le \mathcal{B}, \quad n = 1,2,\ldots, k = 0,1,\ldots$$

Dimostrazione. *Per la* (3), *ovvero per la* (7), *per la linearità dello spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *e per l'associatività dell'addizione negli spazi lineari si ha l'ovvia identità*

$$\sigma^{(n+k)} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{n+k} s^{(\nu)}\right) / (n+k)$$

che, per la (3) *e la* (6), *dà immediatamente l'identità* (13); *quest'ultima dà a sua volta l'identità*

$$\sigma^{(n)} - \sigma^{(n+k)} = \sigma^{(n)} - \left(\sigma^{(n)} n + \sigma^{(k)}_{(n+1)} k\right) / (n+k)$$

da cui segue subito l'identità (14); *infine se la serie* (1) *è limitata sullo spazio normato* $(S, \|\bullet\|)$ *allora per* (3), (6), (15) *e la proprietà triangolare della norma si hanno le due diseguaglianze* (16), *infatti*

$$\left\|\sigma^{(n)}\right\| = \left\|\sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)}\right\| / n \le \sum_{\nu=1}^{n} \left\|s^{(\nu)}\right\| / n \le \mathcal{B}$$

$$\left\|\sigma^{(k)}_{(n+1)}\right\| = \left\|\sum_{\nu=n+1}^{n+k} s^{(\nu)}\right\| / k \le \sum_{\nu=n+1}^{n+k} \left\|s^{(\nu)}\right\| / k \le \mathcal{B} \ \square$$

OSSERVAZIONE.

La diseguaglianza (10) *per le medie di Cesàro* (3) *su spazi normati, ed in particolare di Banach, è notevole anche per la circostanza che neppure la sua più semplice versione per*

$$(S, \|\bullet\|) = (\mathbb{C}, |\bullet|) \qquad (S, \|\bullet\|) = (\mathbb{R}, |\bullet|)$$

ovvero neppure la più semplice diseguaglianza

$$\left|\sigma^{(n+k)} - \sigma^{(n)}\right| \le \frac{k 2\mathcal{B}}{n+k} \qquad n = 1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots$$

sembra mai ricorre nella letteratura esistente in materia di medie di Cesàro (*o di medie aritmetiche*). *D'altra parte, la dimostrazione di detta diseguaglianza si fonda, come si è visto, sull'identità* (13) (*da cui segue l'identità* (14)) *e sulle diseguaglianze* (16), *identità e diseguaglianze le cui versioni nel ristretto ambito del campo reale sono invece ben note in letteratura. Più precisamente le diseguaglianze* (16) *e l'identità* (10) *danno la versione in spazi normati, ed in particolare di Banach, delle proprietà delle medie aritmetiche sul campo reale note in letteratura come proprietà rispettivamente di* internalità *e di* (pseudo-)associatività. *Per l'*internalità *si veda p.es. in* Naguno (1930) *la proprietà* III, *proprietà che in* Kolmogorov (1930) *si deduce dalle proprietà* I *e* III. *Per la* (pseudo-)associatività *si veda p.es in* Naguno (1930) *la proprietà* II *ovvero in* Kolmogorov (1930) *la proprietà* IV *e la formula* (2) p. 389 □

Bibliografia.

Banach, S.: 1932, *Théorie des Opérations Linéaires*, Hafner, New York.

Kolmogorov, A. N.: 1930, *Sur la Notion de la Moyenne,* Atti R. A. Lincei (6), 12, pp. 388-391.

Knopp, K.: 1956, *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York.

Nagumo, S.: 1930, *Über eine Klasse der Mittelwerte,* Japaneese J. of Math., (7), 7, pp. 72-79.

Stromberg, K. R.: 1981, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Pacific Grove.

Trénoguine, V.: 1985, *Analyse Fonctionnelle*, MIR, Moscou.

Zygmund, A.: 1959, *Trigonometric Series,* Cambridge University Press, Cambridge.