I PRODOTTI A CAPITALE GARANTITO[#]

Emiliano Laruccia,[*] *Valter Lazzari*[**]

1. Premessa

Il ribasso dei mercati azionari mondiali registrato nel triennio 2000-2002 ha rafforzato il grado di avversione al rischio degli investitori, riportando in auge servizi e prodotti di risparmio gestito a rischio asimmetrico, ossia in grado di tutelare il capitale investito senza compromettere la partecipazione a eventuali rialzi dello strumento o del mercato finanziario su cui si è deciso di puntare.

Dopo una breve fase di popolarità negli USA a metà anni '80, il successo di tali prodotti era scemato, dapprima perché ritenuti responsabili del tracollo delle borse statunitensi nell'ottobre 1987, poi perché giudicati superflui nell'ottimismo generato dal più lungo e marcato trend rialzista mai registrato nei mercati azionari.

La recente ripresa di favore è stata guidata dagli intermediari, che hanno non solo accomodato, ma anche assecondato e promosso il ritorno verso le forme di risparmio protetto/garantito. Essa ha aperto l'opportunità di arricchire la gamma di offerta con prodotti più complessi e articolati, ottenendo il duplice vantaggio di maggiori margini di guadagno e di minor pressione competitiva sui prezzi, in un contesto ove la concorrenza si sviluppa soprattutto in termini di differenziazione di prodotto.

Nonostante l'offerta sia ampia, la costruzione di un prodotto finanziario a rischio asimmetrico passa per due soluzioni possibili. La prima prevede l'assunzione di posizioni in opzioni, strumenti finanziari di per sé caratterizzate da un payoff asimmetrico. La seconda passa, invece, per una gestione del patrimonio incentrata sul rispetto di rigide regole di riallocazione del portafoglio, tali da consentire la partecipazione ai rialzi di mercato, limitando però le perdite in caso di ribassi.

Le tecniche di gestione finanziaria utilizzate per impartire il desiderato grado di asimmetria alla distribuzione finale del valore del portafoglio, e quindi al suo rendimento di periodo, definiscono la tecnologia sottostante il prodotto di risparmio gestito a rischio asimmetrico. Esso necessita di una adeguata veste contrattuale e commerciale, il cui disegno non può prescindere

dal contenuto delle disposizioni normative e fiscali in vigore e dalle preferenze, più o meno razionali, espresse dagli investitori.

La promessa di un valore minimo del patrimonio al termine dell'orizzonte temporale di investimento giustifica le definizioni di "gestione a capitale protetto" o di "gestione a capitale garantito" utilizzate per queste forme di risparmio gestito. La differenza tra "protezione" e "garanzia" rileva a fini giuridici. Nel primo caso, infatti, l'impegno a garantire un valore minimo del capitale configura una obbligazione di mezzo; nel secondo una obbligazione di risultato.

Il presente lavoro si focalizza sulle tecniche utilizzate nella costruzione dei prodotti a capitale protetto. In particolare, tali metodologie verranno discusse e raffrontate evidenziando le implicazioni di alcune scelte in merito ai valori dei parametri rilevanti che definiscono le caratteristiche della strategia.

Il secondo paragrafo presenta una tassonomia delle forme di protezione del capitale. Il terzo, quarto e quinto paragrafo illustrano le forme di protezione basate sulle sole scelte di asset allocation. Il sesto paragrafo evidenzia, invece, le forme di *portfolio insurance option based*.

2. Tassonomie delle tecniche di protezione del capitale

Le gestioni a capitale protetto prevedono l'investimento in due classi di attività: una rischiosa e una a rischio contenuto o, come si assumerà nel seguito del lavoro, a rischio nullo. Dalla prima dipendono le potenzialità di *upside* della gestione. La seconda, invece, serve a produrre con la sua remunerazione di periodo il valore minimo di patrimonio finale che la gestione si impegna a ritornare.

In base alla strategia di gestione perseguita, si distinguono le gestioni dinamiche da quelle statiche a seconda che esse prevedano o meno il ribilanciamento del portafoglio in funzione dell'andamento passato del mercato. Alla maggiore potenzialità di guadagno di una gestione dinamica si contrappongono i minori costi di transazione di quella statica.

In base alla variabilità del valore finale del portafoglio rispetto alla dinamica dell'attività rischiosa durante il periodo di gestione, si distinguono le gestioni *path dependent* da quelle *path indipendent*. Nelle prime il valore finale del portafoglio è funzione dell'intera traiettoria disegnata dal prezzo dell'attività rischiosa. Nelle seconde rileva solo il suo prezzo al termine dell'orizzonte di investimento, indipendentemente dal percorso con cui è stato raggiunto.

Le caratteristiche qualificanti un prodotto di risparmio gestito a capitale protetto o garantito sono sette:

a) l'attività rischiosa di riferimento;

b) l'orizzonte temporale su cui la garanzia o protezione è prestata;
c) la definizione del rendimento dell'attività rischiosa di riferimento cui il rendimento della gestione a capitale protetto è parametrato;
d) il *capture ratio*;
e) il livello di copertura;
f) la probabilità di *stop loss*;
g) la probabilità di fallimento dell'algoritmo.

L'attività rischiosa di riferimento definisce le potenzialità di guadagno della gestione a capitale protetto. Essa contribuisce alla distribuzione dei rendimenti del portafoglio gestito sia in quanto componente del portafoglio stesso, sia perché da essa dipende l'onere da sopportare per assicurare il mantenimento di un livello finale minimo di ricchezza. Tale onere si manifesta in diversi modi a seconda della tecnologia utilizzata per strutturare il prodotto: premio dell'opzione nel caso di protective put o partecipating call; costi di transazione nel caso di strategie dinamiche di portfolio insurance.

L'orizzonte temporale su cui la garanzia viene prestata è uno dei fattori che determinano l'asset allocation realizzabile stante il vincolo della protezione del capitale e, di conseguenza, la distribuzione del rendimento a scadenza della gestione. Tanto più esteso è l'orizzonte temporale, tanto più l'attività priva di rischio può contribuire con il suo rendimento a garantire un certo livello di ricchezza finale permettendo un'esposizione maggiore del portafoglio all'andamento dell'attività rischiosa.

In genere il profitto della gestione a capitale protetto o garantito dipende dal rendimento di periodo, se positivo, dell'attività rischiosa di riferimento. Tuttavia, poiché l'onere della garanzia/protezione dipende dal rischio che occorre coprire, talvolta si opta per una forma di path dependency che implichi una rischiosità inferiore. Ad esempio, la gestione può promettere una partecipazione definita dal rapporto tra la media dei suoi prezzi osservati nel periodo e quello iniziale invece che dal rapporto tra fine e inizio periodo. Poiché la distribuzione di una media è meno volatile di quella di una singola osservazione, il costo della copertura viene ridotto in modo sensibile, contestualmente però alle opportunità di guadagno. Nell'esempio esplicitato, il potenziale profitto della gestione viene depresso anche dalla brevità degli orizzonti temporali su cui viene calcolata la media, comunque più brevi di quello della gestione

Altra caratteristica qualificante dei prodotti a capitale protetto è rappresentata dal capture ratio, ossia il rapporto tra il rendimento pagato dalla gestione protetta e il "rendimento" dell'attività rischiosa che funge da parametro di riferimento per la gestione protetta, qualora positivo.

A seconda della tecnologia di protezione impiegata, il capture ratio sull'intero orizzonte temporale di gestione può essere definito a priori (per le strategie path independent) o può determinarsi solo a posteriori (per le strategie path dependent). In questo secondo caso, il capture ratio che solitamente viene indicato corrisponde al grado di esposizione all'attività rischiosa derivante dall'asset allocation iniziale. La sua rilevanza è minima, essendo destinato a mutare già alla prima operazione di ribilanciamento del portafoglio che si renda necessaria. Anche nelle gestioni con capture ratio di periodo predeterminato, l'informazione che esso offre può risultare *misleading* e non immediatamente confrontabile. Occorre, infatti, accertarsi in via preliminare rispetto a quale accezione di rendimento dell'attività rischiosa è definito. Un capture ratio dell'80% rispetto al rendimento di periodo del portafoglio di riferimento presenta per l'investitore un valore assai maggiore di un capture ratio del 90% riferito a una media di rendimenti del predetto portafoglio comunque calcolata.

Altro elemento di differenziazione è il *livello di copertura***,** ossia il valore minimo, determinato a priori, che il portafoglio sottostante dovrà avere allo scadere del piano di investimento, e può comprendere o meno i costi di copertura necessari ad attuare la strategia adottata.

La probabilità di stop loss quantifica il rischio che l'esposizione del prodotto garantito si azzeri nel corso della gestione al fine di consentire il rispetto del livello di copertura promesso a scadenza. Trattasi di una situazione irreversibile che pone fine alla speranza di poter partecipare attraverso la gestione a futuri rialzi dell'attività di riferimento.

La probabilità di fallimento della strategia informa invece sulla probabilità che il capitale finale prodotto dalla gestione risulti inferiore al livello di copertura promesso. Nelle gestioni a capitale protetto, che, come visto, configurano per l'investment manager un'obbligazione di mezzo, del minor risultato ottenuto si deve far carico il risparmiatore qualora il gestore abbia operato con la diligenza dovuta. In quelle a capitale garantito, invece, il gestore sarà chiamato ad integrare la minor somma al fine di assicurare il rispetto del livello di protezione garantito.

La probabilità di fallimento della strategia, così come la probabilità di incorrere in una situazione di stop loss, non è nulla nel caso di gestioni dinamiche. Il fallimento può determinarsi in conseguenza sia di puri rischi di mercato, in particolare di rilevanti salti istantanei di prezzo o di improvvisa carenza della liquidità necessaria per procedere ai ribilanciamenti necessari, sia di un rischio operativo per il gestore nella corretta implementazione della strategia (crash del sistema informativo, intempestiva esecuzione sul mercato degli ordini di compravendita con i quali concretizzare il ribilanciamento desiderato).

3. Buy & hold strategy

La strategia *Buy and Hold* (*B&H*) è la tecnica di protezione del capitale di più semplice realizzazione. Essa prevede di suddividere il capitale investito in due parti. La prima è destinata all'acquisto di titoli obbligazionari privi di rischio in grado di far maturare alla scadenza della protezione un importo pari al minimo promesso. La seconda, determinata in modo residuale, è impiegata per l'acquisto del portafoglio rischioso di riferimento da cui si otterrà l'extrarendimento positivo rispetto al minimo garantito. L'iniziale allocazione così determinata viene mantenuta fino a scadenza. La tecnologia buy & hold è quindi classificabile come una strategia statica di protezione.

Si consideri il seguente esempio le cui specifiche sono:

→ Orizzonte temporale	(T)	5 anni
→ Tasso Risk free per scadenze 5 anni	(i)	4.56%
→ Investimento iniziale	(I)	100
→ Livello di copertura	(K)	100%
→ Costo di un ZCB a 5 anni	(V_{t0})	80.00
→ Asset rischioso:	Fondo A	
→ Prezzo Fondo A in t_0	(Pt_0)	100

La percentuale di investimento iniziale nell'asset rischioso risulta pari a:

$$p = \frac{I - I \cdot K \cdot Vt_0}{I} = 20.00\% \qquad \textbf{[1]}$$

che equivale all'acquisto di n quote del Fondo A con n pari a:

$$n = \frac{p \cdot I}{Pt_0} = .20 \qquad \textbf{[2]}$$

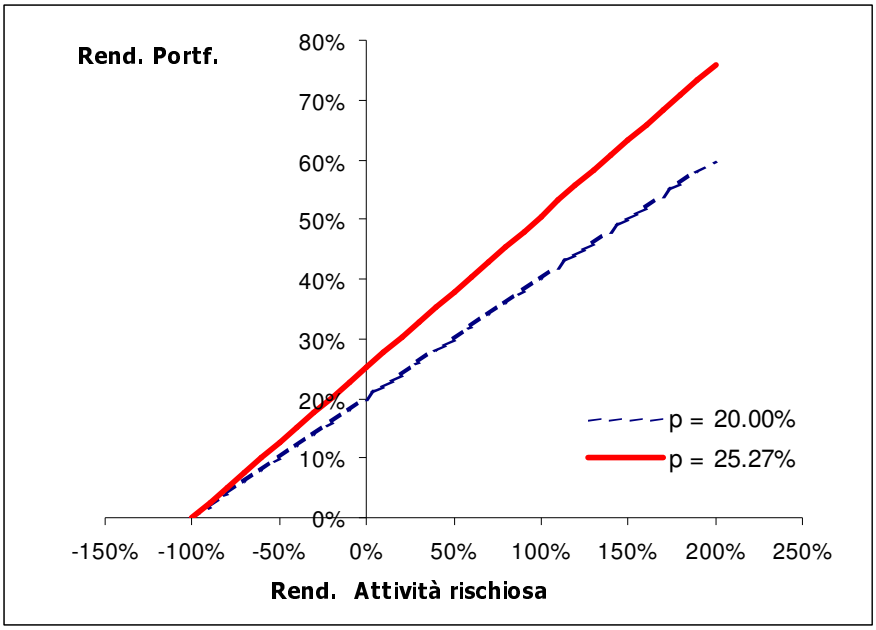
A scadenza il valore dell'investimento sarà pari a

$$VF = I \cdot K + n \cdot PT \qquad \textbf{[3]}$$

con PT il prezzo del Fondo A al termine del periodo di investimento.

Dalla [3] appare come, anche qualora il valore dell'investimento rischioso si annullasse ($PT = 0$), l'investimento iniziale sarebbe salvaguardato. Se il valore del portafoglio rischioso raddoppiasse, a scadenza il patrimonio gestito varrebbe 140. Maggiore è il rendimento dell'asset rischioso, maggiore è il costo della copertura in termini di rinuncia al rendimento misurato dall'*excess return* ossia dalla differenza tra il rendimento atteso sull'attività rischiosa e quello dell'attività risk free.

Figura 1: Relazione tra rendimento dell'asset rischioso e di una strategia Buy&hold



E' possibile costruire la curva di rendimento del portafoglio come funzione del rendimento a scadenza dell'asset rischioso (capture ratio). La figura 1 mostra come all'aumentare del rendimento dell'attività rischiosa, il valore del portafoglio cresca in modo costante, ma meno che proporzionale. La pendenza della retta è inferiore all'unità, valore che si registrerebbe qualora la totalità del capitale fosse investita nell'attività rischiosa nel Fondo A. L'inclinazione della curva è pari alla quota investita nel portafoglio rischioso di riferimento (p).

L'esposizione iniziale ai mercati di riferimento dipende positivamente dai tassi di interesse e dall'orizzonte temporale della protezione, mentre dipende negativamente dal livello di copertura promesso. Alti tassi d'interesse, durate più estese e la necessità di un montante finale inferiore riducono il costo dello ZCB consentendo un margine più elevato da investire nell'attività rischiosa.

4. Stop loss strategy

La *Stop Loss Strategy* (*SLO*) prevede un'asset allocation iniziale del 100% del patrimonio nell'attività rischiosa. La composizione resta inalterata finché il valore dell'investimento si mantiene superiore al prezzo del titolo risk free necessario a produrre a scadenza il montante minimo promesso. Se tale condizione viene rispettata durante tutta la gestione, l'investitore ottiene a scadenza il rendimento dell'attività rischiosa di riferimento avendo mantenuto un'esposizione totale alla stessa per tutto il periodo.

Se, al contrario, il valore del patrimonio scende fino a eguagliare quello dello ZCB necessario ad assicurare la copertura a scadenza prevista, si rende necessaria una subitanea riallocazione di tutto il capitale dall'attività rischiosa all'attività risk free. Il ribilanciamento serve a prevenire il rischio che ulteriori ribassi dell'attività rischiosa pregiudichino la possibilità di far fronte all'impegno assunto in termini di montante finale minimo. Comporta, tuttavia, la rinuncia alla possiblità di godere di eventuali futuri rimbalzi dell'attività rischiosa.

Il valore di uno ZCB di durata pari al periodo residuo di copertura costituisce quindi la soglia (floor) il cui raggiungimento fa scattare il ribilanciamento. A parità di condizioni, l'avvicinarsi a scadenza fa salire il valore dello ZCB rendendo più stringente il vincolo da rispettare per mantenere aperta l'esposizione all'attività rischiosa. Un ribasso dei tassi di interesse produce lo stesso effetto in quanto, a parità di tempo a scadenza, alza il valore dello ZCB richiesto.

La stop loss strategy rientra tra gli schemi di gestione dinamica poiché ammette la possibilità di ribilanciamenti del portafoglio durante la gestione. In particolare ammette la possibilità di un solo ribilanciamento da realizzarsi con un turnover integrale del portafoglio dall'attività rischiosa all'attività priva di rischio.

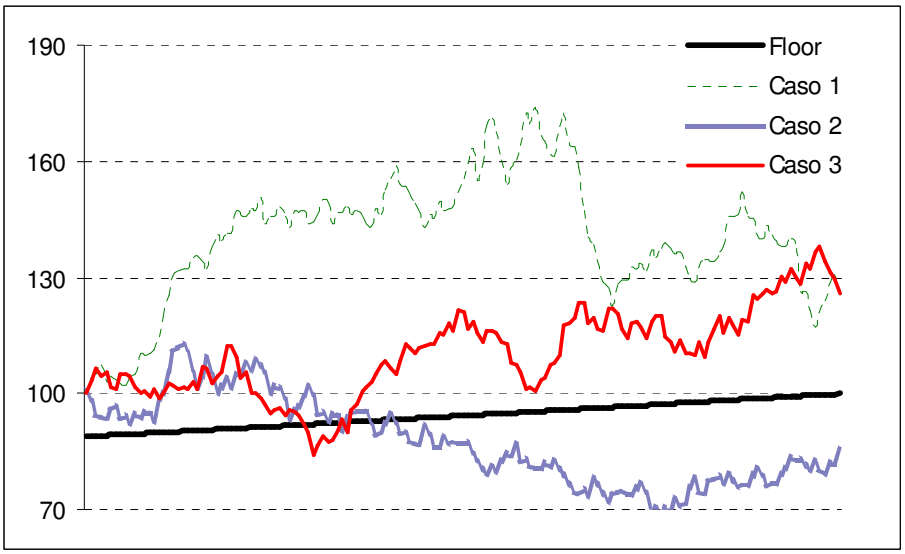
Riprendendo i dati dell'esempio precedente, l'investimento iniziale nell'attività rischiosa è pari al 100%. Per essere costretti subito a un ribilanciamento integrale del portafoglio a favore dell'attività risk free, il prezzo dell'attività rischiosa dovrebbe crollare fino a eguagliare quello dello ZCB, il che significa una perdita del 20.0% circa. Mantenere anche una minima esposizione del portafoglio all'attività rischiosa implica rinunciare alla certezza di poter raggiungere a scadenza il capitale minimo garantito.

Questa strategia è tanto semplice quanto rischiosa da realizzare. Le condizioni di mercato, infatti, possono impedire di realizzare il desiderato ribilanciamento contestualmente al verificarsi della condizione sopra descritta. Da un lato, infatti, il prezzo dell'attività rischiosa può evolversi in modo non continuo, "saltando" istantaneamente da sopra a sotto la soglia. Dall'altro, anche se il prezzo dovesse muoversi in modo continuo, il mercato potrebbe conoscere una carenza di liquidità che impedisce di portare a termine il ribilanciamento prima che il patrimonio gestito si depauperi oltre il limite che permette l'acquisto dello ZCB. In altre parole, sussiste un rischio di esecuzione della strategia che può pregiudicare la tempestività richiesta per l'intervento di stop loss.

Questa strategia di protezione è inoltre path dependent. In corrispondenza di una stessa rivalutazione di periodo dell'attività rischiosa, il portafoglio gestito può offrire un capture ratio pari a uno o pari a zero a seconda che nel corso della stessa si sia realizzato l'evento che determina l'intervento di stop loss.

La figura 2 esemplifica questa possibilità mostrando tre diverse traiettorie di prezzo dell'attività rischiosa, due delle quali portano allo stesso valore finale.

Figura 2: Sentieri temporali dell'asset rischioso e strategia di stop loss



In un caso (Caso1), l'attività rischiosa non scende mai sotto la soglia minima che fa scattare la stop loss. L'investitore cattura in pieno la rivalutazione dell'investimento.

Se lo stesso prezzo finale viene raggiunto seguendo un sentiero evolutivo diverso (Caso 3), la gestione produce un montante non superiore al capitale minimo assicurato con un capture ratio per l'investitore nullo. Nel momento in cui il prezzo dell'attività rischiosa ha toccato la linea nera che rileva il prezzo dello ZCB che produce a scadenza il capitale garantito scatta la scelta di stop loss, il che comporta la rinuncia ad approfittare del successivo recupero di valore. Di fatto l'investitore ha acquisito una protezione che si è poi rivelata inutile. Situazioni siffatte risultano assai probabili in contesti di mercati molto volatili[1].

La traiettoria di prezzo riportata come "Caso 2" produce per l'investitore finale lo stesso patrimonio finale ottenibile qualora l'attività rischiosa seguisse il sentiero evolutivo assai peggiore qualificato come "Caso 3". In questo caso scatterebbe egualmente la protezione della stop loss, destinata, però, a rivelarsi utile.

La probabilità che scatti la stop loss è funzione positiva della volatilità dell'attività rischiosa e del livello di copertura, nonché funzione inversa del livello del tasso di interesse (i tassi bassi alzano il *floor*).

5. Costant Proportion Portfolio Insurance

La *Costant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)* è una strategia dinamica di portfolio insurance. Nella sua forma più semplice (Black e Perold 1992) l'algoritmo definisce la quota E_t da investire in un'attività rischiosa A_t e conseguentemente, per differenza, la quota da allocare in una priva di rischio R_t, sulla base della seguente formula:

$$E_t = m \cdot C_t \qquad \textbf{[4]}$$

La [4] mostra come l'investimento nell'attività rischiosa è direttamente proporzionale al parametro *m*, variabile esogena scelta dal gestore che indica il grado di aggressività della strategia spesso denominata "leva", e al termine C_t, ossia il c.d. "cuscino".

Il cuscino, C_t, è pari alla differenza tra il valore del portafoglio al tempo t ($NAV_t = S_t + B_t$), composto dall'attività rischiosa *S* e da quella risk free *B*, e il valore minimo, detto *floor, (MIN_t)* al di sotto del quale il patrimonio investito non può scendere, ossia:

$$C_t = NAV_t - MIN_t$$

A sua volta, il floor è determinato dalla percentuale del patrimonio che si intende coprire (*K*) e dal prezzo dell'attività priva di rischio (F_t), ossia

$$MIN_t = K \cdot F_t$$

Ad esempio si supponga di voler investire un patrimonio pari a 100 ($NAV_{t\,0}$) e di voler proteggere il 100% di tale ammontare (*K=1*). Con un tasso di interesse del 4.56% e un orizzonte temporale pari a 5 anni, il prezzo dello ZCB è pari a 79.61. Se si attribuisce a *m* un valore pari a 3, ne consegue un'allocazione iniziale del patrimonio all'attività rischiosa pari a $E_{t\,0} = 3 \cdot (100\text{-}100\% \cdot 79.61) = 61.17$; posto che il capitale iniziale è pari a 100, 61.17% è la percentuale investita nell'attività rischiosa.

Se a seguito dell'incremento del prezzo dell'attività rischiosa il valore del portafoglio cresce del 5%, a parità di floor[2], l'attività rischiosa in portafoglio deve essere portata a $E_t = 3 \cdot (105\text{-}100\% \cdot 79.61) = 76.17$, il che equivale a una percentuale investita pari al 72.54%, con un aumento del 11.4% rispetto all'allocazione iniziale. Viceversa, qualora il portafoglio scendesse di valore del 5%, l'allocazione desiderata nell'attività rischiosa dovrebbe scendere a E_t[3] $= 3 \cdot (95\text{-}100\% \cdot 79.61) = 46.17$, ossia il 48.6% con una diminuzione del 12.6%.

Anche variazioni nei tassi di interesse, in costanza di prezzo dell'attività rischiosa, possono indurre a ribilanciare il portafoglio. Un aumento dei tassi, ad esempio, comporta una caduta del

valore del titolo privo di rischio che si traduce sia in un minor valore del valore del portafoglio, NAV_t , sia in un aumento del cuscino, $C_t = NAV_t - MIN$. Se la strategia di protezione non si trova già in una situazione di stop loss, ossia se l'allocazione all'attività rischiosa è ancora positiva, l'effetto di aumento del cuscinetto ha maggiore rilevanza rispetto a quello di diminuzione del NAV, con conseguente necessità di un ribilanciamento di portafoglio a favore dell'attività rischiosa, ossia con conseguente aumento di E_t.

Il parametro *m* riveste un peso cruciale nell'algoritmo che guida le decisioni di ribilanciamento determinando le caratteristiche di rischio e rendimento della strategia.

In particolare la scelta di *m* definisce i seguenti attributi della gestione:

a) il capture ratio (e quindi anche la probabilità di stop loss);
b) i costi di ribilanciamento
c) la probabilità di fallimento dell'algoritmo.

Due casi estremi si rivelano di particolare interesse, in quanto evidenziano come le strategie di protezione finora discusse (buy & hold e stop loss) altro non siano che casi particolari della strategia CPPI.

Se $m = 1$ il meccanismo di protezione diventa quello della strategia buy & hold discussa in precedenza con capture ratio costante e pari alla proporzione investita inizialmente nell'attività rischiosa di riferimento, costo di ribilanciamento nulli e zero probabilità di fallimento dell'algoritmo di protezione.

Se, all'opposto, *m* tende a diventare infinitamente grande il meccanismo di protezione si riduce alla strategia stop loss. L'intero patrimonio in gestione resta allocato all'attività rischiosa finché il cuscino si mantiene minimamente positivo, per subire, però, un ribilanciamento integrale a favore dell'attività risk free non appena il cuscino si azzera.

In questo caso capture ratio e costi di ribilanciamento dipendono dall'evoluzione del valore dell'attività rischiosa durante la gestione, mentre la probabilità di fallimento dell'algoritmo dipende dal rischio di non riuscire a dare esecuzione immediata al ribilanciamento richiesto.

5.1. Leva e capture ratio

Quanto maggiore è l'aggressività della strategia come determinata dal parametro *m*, tanto più consistente è l'investimento iniziale nell'attività rischiosa e, di conseguenza, il rendimento atteso a scadenza.

L'incertezza sul risultato finale della strategia è, però, duplice dipendendo sia dall'alea relativa all'andamento dell'attività rischiosa di riferimento, sia dalla natura path dependent del capture ratio che deriva dalla variabilità della quota investita nell'attività rischiosa in funzione del NAV della gestione.

Si ipotizzi che S segua un processo diffusivo normale con media μ e deviazione standard σ, ossia:

$$S_t = S_{t-1} \cdot (1+\Delta S)$$

con $$\Delta S \sim N(\mu, \sigma)$$

A ogni periodo t vale:

$$NAV_t = NAV_{t-1} \cdot [\ 1 + E_{t-1} \cdot \Delta S + (1-E_{t-1}) \cdot \Delta B\ ]$$

Variazioni del valore dell'attività rischiosa, S, si ripercuotono sul valore del portafoglio ($NAVt$) in proporzione a E_{t-1}, mentre l'impatto di variazioni nel valore del titolo risk free (B) avviene secondo un parametro di proporzionalità ($1-E_{t-1}$).

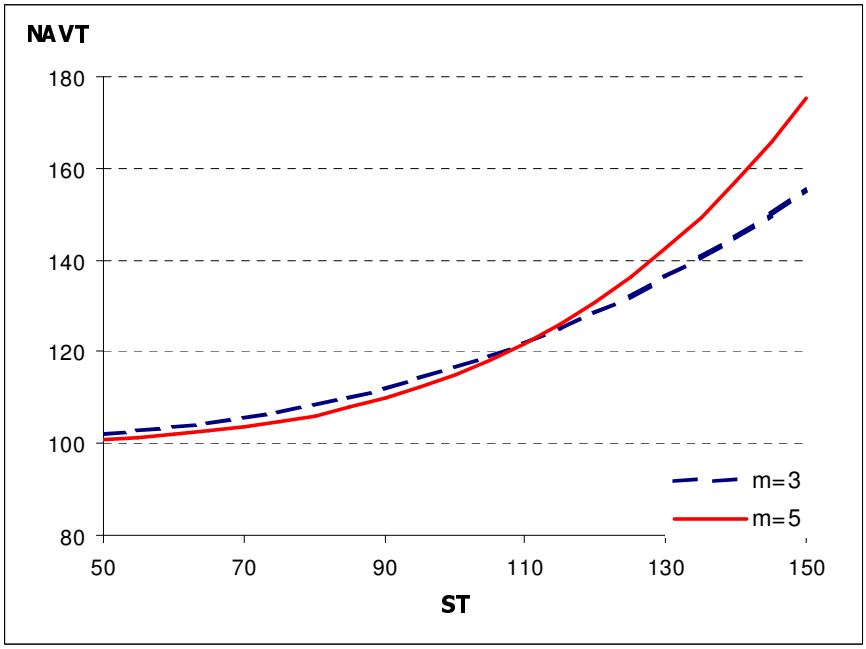
In particolare è possibile dimostrare che[4], in assenza di borrowing limit il valore atteso a scadenza ($I(S,T)$) della strategia in esame è pari a:

$$I(S,T) = K + (I_0 - MIN_0) \cdot \frac{S}{S_0}^{m} e^{\left[\frac{1}{2} m(m-1)\sigma^2 T\right]} \qquad \textbf{[5]}$$

La figura 3 evidenzia come il termine m incida sulla "curvatura" del payoff. Tanto maggiore è m, tanto più il payoff della strategia è funzione convessa del valore a scadenza dell'attività rischiosa.

Se, invece, esiste un limite massimo alla percentuale del patrimonio investibile nell'attività rischiosa (in genere il 100% giacché non è di solito ammesso il ricorso alla leva finanziaria), E, il payoff finale della gestione dipende dal periodo di tempo durante il quale il vincolo è risultato operativo.

Figura 3: Payoff di una CPPI per diversi valori di m (hp: no borrowing limit, ribilanciamento continuo sigma=20%)



Poiché durante tale periodo, infatti, non possono essere operati ribilanciamenti, il montante finale atteso prodotto dalla gestione a scadenza è pari a

$$I(S,T) = K + \left[(I_0 - MIN_0) \cdot \frac{S_{\max}}{S_0}^{m} e^{\left[\frac{1}{2} m(m-1) z \sigma^2 T\right]} \right] \cdot \frac{S - S_{\max}}{S_{\max}} \qquad \textbf{[6]}$$

con z = frazione di tempo nella quale il limite non è vincolante e S_{max} è il valore di S che attiva il borrowing limit.

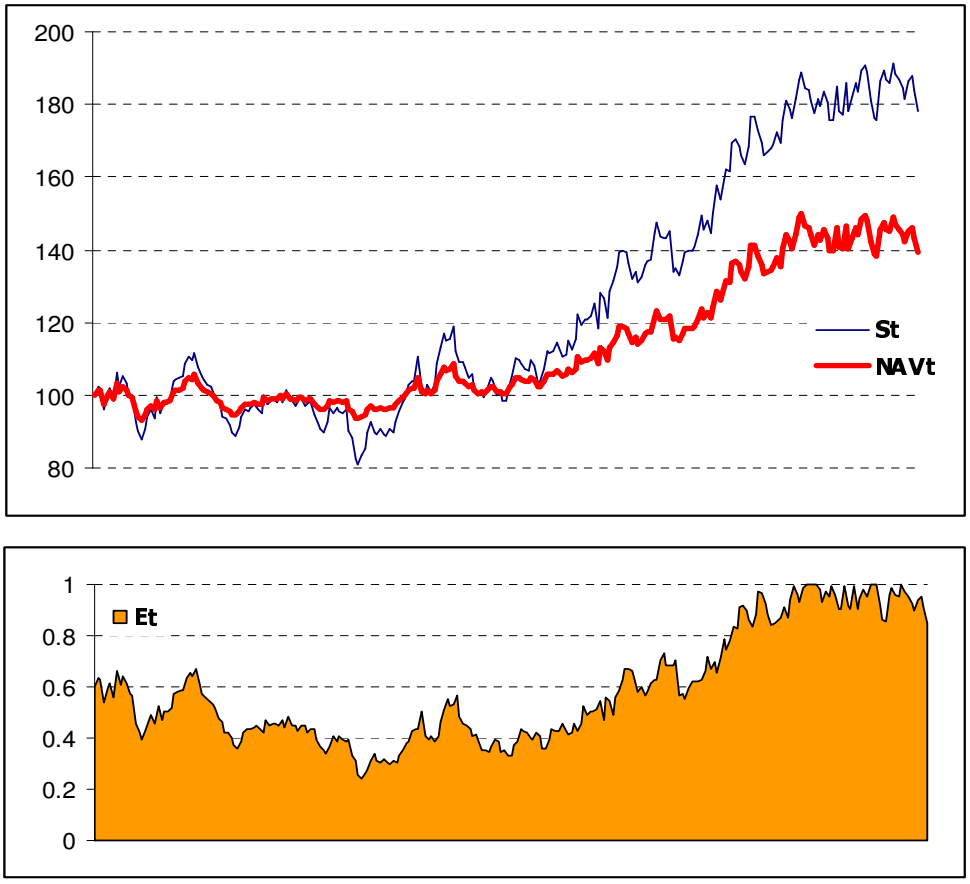
Quando esiste un limite alla capacità di leverage e i ribilanciamenti avvengono nel discreto risulta difficile definire il valore della strategia in forma chiusa.

Per poter analizzare come il parametro m impatta sul capture ratio in presenza di borrowing limit e di ribilanciamento discreto, occorre procedere per simulazione.

Si ipotizzi un processo diffusivo con drift (d) pari a 4.56% (pari al tasso risk free), standard deviation (σ) pari al 20% un orizzonte temporale di 5 anni con ribilanciamenti settimanali.

La figura 4 mostra una possibile traiettoria del valore S, i relativi valori del portafoglio (NAV) e della quota investita sulla base dell'algoritmo CPPI. L'esposizione all'equity aumenta a seguito di una crescita di S senza mai superare il 100%, diminuendo in presenza di una discesa di S.

Figura 4: Sentieri temporali dell'asset rischioso e strategia di CPPI

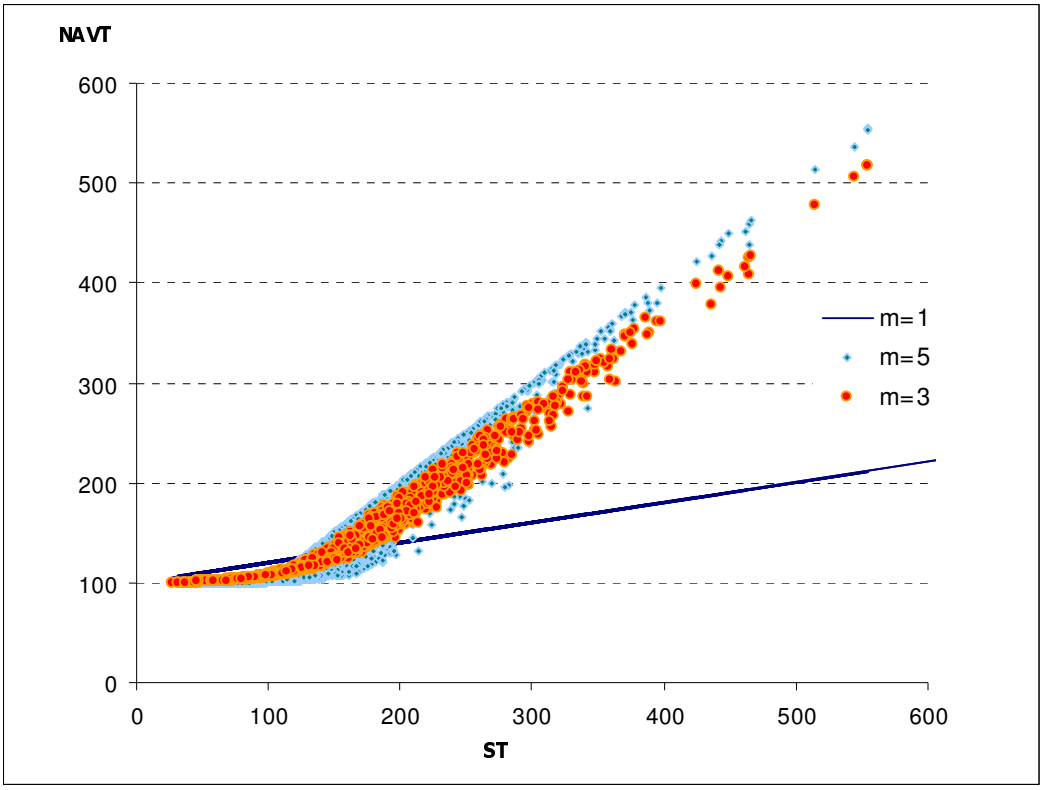


A questo punto possiamo tracciare *n* traiettorie (con n sufficientemente grande) e analizzare come, al cambiare della leva, cambia il capture ratio (figura 5).

Nel caso *m* = 1, la CPPI equivale alla B&H e quindi il capture ratio è costante. Al crescere di *m* si apre la possibilità di un maggiori profitti (maggiore "upside potential"), a fronte del quale, però, interviene una maggiore dispersione dei rendimenti per scadenza.

In particolare, potrebbero verificarsi casi in cui, nel primo periodo di gestione, i mercati azionari subiscono forti perdite per poi riprendersi successivamente. In questo caso, una CPPI che parte con leva alta (per esempio 5) viene penalizzata dall'alto investimento iniziale in azionario, investimento che viene progressivamente ridotto. Se successivamente i mercati si riprendono, l'upside verrà colto solo in parte dal portafoglio.

Figura 5: Capture ratio in funzione di diversi livelli di m



5.2. Leva e costi di ribilanciamento

Come evidenziato dalla figura 4, la strategia CPPI è caratterizzata da una gestione che prevede continui ribilanciamenti della componente rischiosa e di quella non rischiosa. La simulazione effettuata ipotizza che le ricomposizioni avvengano ad intervalli settimanali.

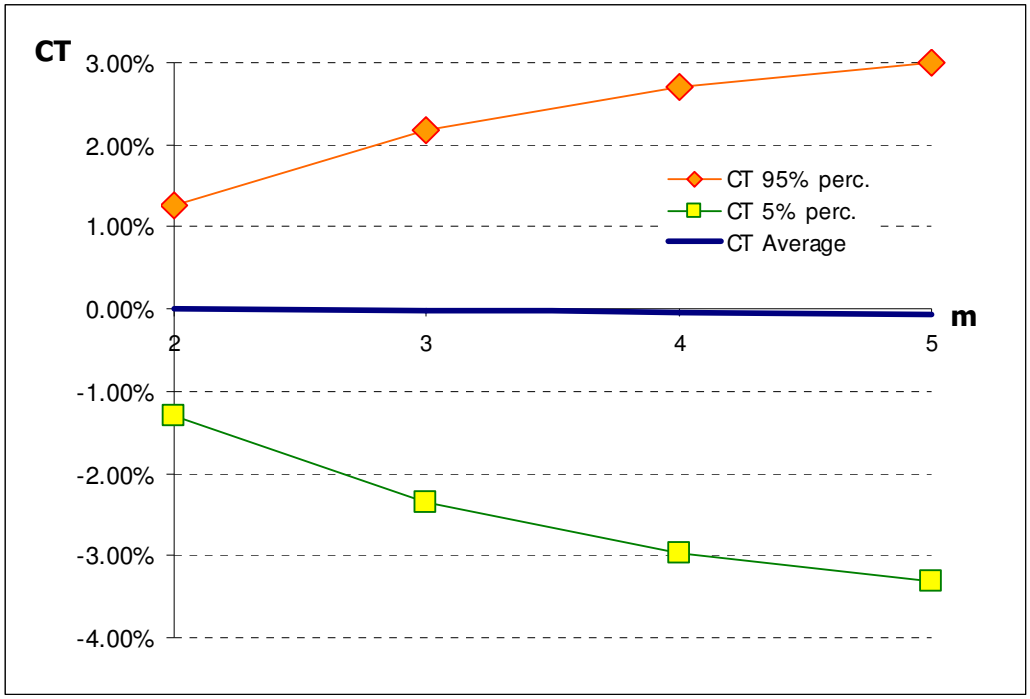
A questo punto possiamo analizzare il costo di ribilanciamento partendo da una semplice intuizione. Se tra *t-1* e *t* è stata aumentata (ridotta) la partecipazione all'asset rischioso e tra *t* e *t+1* il valore di S sarà aumentato (diminuito), questo avrà portato ad un incremento del valore di portafoglio in quanto avremmo acquistato (venduto) *S* in *t* ad un valore inferiore (superiore) rispetto quanto vale in a *t+1*.

Diversamente, qualora il prezzo in *t+1* fosse diminuito (aumentato), avremmo acquistato (venduto) ad un prezzo superiore, provocando una diminuzione di valore del portafoglio. Possiamo quindi definire il costo di ribilanciamento come:

$$C_T = \sum_t (E_t - E_{t-1}) \cdot \Delta S_t \qquad [7]$$

Tale costo sarà direttamente proporzionale alla volatilità di *S* e anche alla leva (che determina Et). Su quest'ultimo punto occorre però considerare che, in presenza di un borrowing limit, leve alte aumentano la possibilità che la strategia sia full invested nell'asset rischioso e quindi saranno più frequenti i casi in cui il valore (E_t-E_{t-1}) sia pari a 0.

Figura 6: Costi di ribilanciamento per diversi livelli di m



Questo fenomeno emerge dall'analisi della figura 6. Si noti che se $C_T > 0$, questo corrisponde ad un "guadagno" da ribilanciamento, viceversa a un "costo". Il grafico evidenzia come a leve più alte corrispondono in media costi di ribilanciamento più alti. Non solo la media dei costi è più alta, ma anche i valori estremi della distribuzione. In particolare il quinto percentile della

distribuzione di C_T è pari a –2.35% per leva pari a 3, -2.97% per leva pari a 4 e –3.32% per leva pari a 5.

5.3. Leva e probabilità di crash dell'algoritmo

L'algoritmo CPPI consente di generare un valore finale del patrimonio almeno pari al livello minimo assicurato a meno che tra due ribilanciamenti consecutivi il valore dell'attiva rischiosa di riferimento subisca una perdita superiore in valore assoluto alla percentuale data dal reciproco del coefficiente di leva, ossia:

$$\Delta S < -\frac{1}{m}$$

Tanto maggiore è *m*, tanto più ampio è l'intervallo dei rendimenti negativi dell'attività rischiosa che pregiudica la corretta esecuzione della procedura di copertura. Ad esempio, con una leva pari a 3, la strategia non risulta correttamente realizzata solo se tra due ribilanciamenti consecutivi l'attività perde più di un terzo del suo valore. Con una leva pari a 4, a far fallire la protezione è sufficiente una perdita superiore al 25%.

La probabilità, *p*, che non si riesca ad attivare con il dovuto tempismo il ribilanciamento necessario ad assicurare l'adeguata stop loss, dipende, oltre che dalla leva prescelta, anche sia dalla volatilità dei rendimenti dell'attività rischiosa di riferimento, sia dalla periodicità dei ribilanciamenti.

Infatti, assumendo che la dinamica dei prezzi dell'attività rischiosa segua un processo diffusivo normale come sopra descritto ne consegue che[5]:

$$p = \text{Prob}\left\{\Delta\%S \le -\frac{1}{m}\right\} = \Phi\left(\frac{\ln(-\frac{1}{m}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt}{\sigma\sqrt{dt}}\right) \qquad \textbf{[8]}$$

ove Φ (x) indica la funzione di ripartizione della normale standardizzata.

Tale probabilità si riferisce all'istante di tempo dt. In realtà, la gestione dinamica si protrae per un orizzonte temporale T, presentando quindi un numero di ribilanciamenti possibili pari a N=T/dt.

Perché la strategia di protezione fallisca il suo obiettivo è sufficiente che il ribilanciamento teso ad assicurare la stop loss non scatti in uno qualsiasi di questi intervalli di tempo compresi tra due ribilanciamenti consecutivi.

Pertanto la *shortfall probability* di una gestione a capitale garantito secondo la tecnica della CPPI, ossia la probabilità che a scadenza la gestione produca un capitale inferiore a quello assicurato, è pari alla probabilità che in almeno uno degli intervalli tra ribilanciamenti consecutivi la stop loss non scatti in tempo, ossia:

$$P = 1-(1-p)^N = 1-\left[1-\Phi\left(\frac{\ln(-\frac{1}{m})-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)dt}{\sigma\sqrt{dt}}\right)\right]^N \qquad \textbf{[9]}$$

La formula prevede che la durata dell'intervallo tra ribilanciamenti sia definito in modo esogeno a priori. Nella realtà esso può essere esteso o ristretto a seconda delle condizioni di mercato risultando in parte endogeno. Esistono, tuttavia, dei limiti oggettivi a questa discrezionalità.

Un primo limite è dato dalla periodicità della rilevazione del valore dell'attività rischiosa, informazione cruciale per decidere sull'opportunità di dar corso o meno al ribilanciamento. Non sempre tale informazione si rende disponibile in modo immediato e continuativo, rivelandosi piuttosto a intervalli di tempo, magari regolari, ma di durata significativa. Un consistente ritardo di informazione può verificarsi, ad esempio, se l'attività rischiosa di riferimento è costituita da un fondo di fondi hedge. La cadenza di rilevazione del NAV di un hedge fund, infatti, di rado è inferiore alla settimana. Più spesso è mensile.

Un secondo limite alla discrezionalità sui tempi del ribilanciamento è dato dal grado di liquidabilità delle posizioni. Esiste, infatti, un ritardo di esecuzione in forza al quale il momento della decisione del ribilanciamento precede quello del suo effettivo completamento. Nel caso di un portafoglio di riferimento costituito da fondi alternativi, tale ritardo consegue al ciclo di liquidazione delle posizioni previsto dal regolamento del fondo (in genere da una settimana a tre mesi). Nel caso di portafogli che replicano indici generali di mercato azionario, il ritardo di esecuzione può essere dettato da un improvviso prosciugarsi della liquidità sul mercato che rende impossibile trovare le controparti necessarie a dar corso al ribilanciamento prima che il movimento avverso di prezzo abbia superato la soglia temuta.

Anche qualora risultasse possibile azzerare sia i ritardi di informazione-decisione, sia quelli di esecuzione del ribilanciamento, il successo della strategia può venire pregiudicato dalla possibilità di una discontinuità nella dinamica dei prezzi dell'attività rischiosa di riferimento. Contrariamente alle caratteristiche dei processi diffusivi, infatti, i prezzi delle attività finanziarie occasionalmente compiono dei "salti", generando divari anche considerevoli tra due rilevazioni consecutive. Se tale variazione percentuale è negativa e superiore, in valore assoluto, al reciproco di m, la protezione accordata da una strategia di CPPI viene necessariamente a mancare.

Quantificare la probabilità di questa terza forma di rischio utilizzando l'espressione [9] non è corretto sotto il profilo teorico. La formula è, infatti, derivata sulla base di un assunto che nega la possibile presenza delle temute discontinuità nei prezzi finanziari.

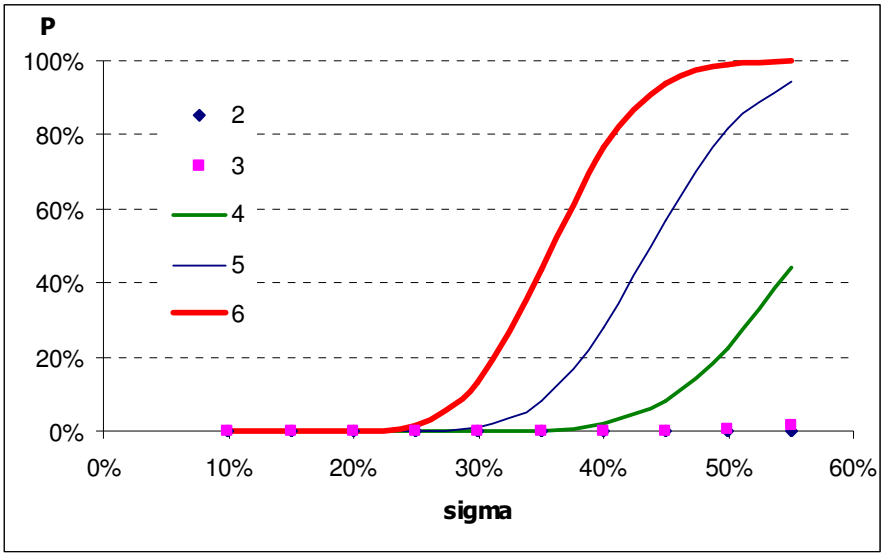
Nella pratica, tuttavia, per semplicità, il rischio di fallimento della strategia di copertura viene valutato predefinendo in modo esogeno la periodicità dei ribilanciamenti, posta in genere

pari a quella programmata in condizioni normali di mercato, e procedendo a ricavare la soluzione o in forma chiusa o attraverso esercizi di simulazione.

La figura 7 presenta un'analisi di sensitività della probabilità di fallimento dello schema di protezione al variare della leva e della volatilità dell'attività rischiosa di riferimento. Entrambi questi fattori risultano positivamente correlati alla probabilità di crash della protezione.

Uno schema CPPI a 5 anni con un intervallo di ribilanciamento previsto a cadenza settimanale, una leva pari a 6 e un'attività rischiosa di riferimento la cui standard deviation dei rendimenti è pari al 30% annuo implica una probabilità di default dell'algoritmo pari al 20%. Diminuendo la leva a 5, a volatilità costante dell'attività rischiosa di riferimento, questa probabilità diventa trascurabile. Lo stesso accade se, mantenendo la leva a 6, la volatilità risultasse pari al 25% annuo.

Figura 7: Probabilità di crash per diversi livelli di m (dt = 7 gg; T = 5 anni)



5.4. Determinazione degli intervalli di ribilanciamento

La periodicità con cui operare i ribilanciamenti costituisce un ulteriore parametro fondamentale per definire la qualità dello schema di protezione basato sul meccanismo della CPPI.

La scelta in merito alla tempistica dei ribilanciamenti risulta influenzata da tre ordini di fattori: la liquidità della sottostante attività rischiosa di riferimento; lo scostamento tra il livello di investimento nell'attività rischiosa indicata dal modello e quello effettivo in portafoglio; i costi di transazione da sopportare per portare a termine la riallocazione del portafoglio.

In merito alla liquidità degli attivi sottostanti a un portafoglio gestito dinamicamente, va notato come accanto a strumenti finanziari negoziati più volte nel corso di una giornata ve ne sono altri che hanno vincoli tali da consentire movimentazioni solo ad intervalli di tempo giornalieri, quando non addirittura settimanali o mensili. Oltre al già citato caso estremo dei fondi hedge, anche il semplice veicolo dei fondi comuni ricade in questa seconda categoria. Ipotizzando di effettuare una sottoscrizione o un riscatto di quote in un normale fondo comune aperto al tempo t, la comunicazione della movimentazione delle quote e del relativo prezzo di esecuzione avverrà con qualche giorno di ritardo (in genere $t+2$ o $t+3$). Solo una volta ricevuti tali eseguiti, è possibile calcolare il valore del portafoglio e quindi calcolare l'esatto valore di E_t.

Tanto più illiquide sono le posizioni nell'attività rischiosa, tanto minore è l'efficacia di uno schema di protezione basato sulla CPPI. Due, infatti, sono le possibili conseguenze: o il gestore accetta di operare i ribilanciamenti a intervalli temporali più estesi accettando un maggior rischio di veder fallire la copertura promessa o ribilancia con maggior frequenza il portafoglio effettuando transazioni su attività più liquide, ma fortemente correlate a quella assunta a riferimento per la gestione. Ad esempio, se quest'ultima fosse rappresentata da un fondo comune che presenta per benchmark l'indice MSCI Value Italy, le scelte di ribilanciamento potrebbero essere decise sulla base dell'andamento dell'indice stesso. Il beneficio della maggior tempestività nella realizzazione dei ribilanciamenti imposti dallo schema di protezione devono, tuttavia, essere confrontati con il costo del basis risk che questa forma di copertura comporta.

Al fine di risparmiare sui costi di transazione e di contenere il rischio di fallimento della copertura, occorre valutare l'opportunità di operare i ribilanciamenti non con periodicità regolare e predeterminata, ma a cadenza variabile in funzione dell'entita del disallineamento che si è venuto a determinare tra il valore suggerito dallo schema della CPPI per l'investimento nell'attività rischiosa, E_t, e quanto al momento effettivamente in essa investito, ossia

$$E_t^* = y\, St / NAV_t$$

con y = numero di quote di asset rischioso inserite in portafoglio con l'ultimo ribilanciamento operato.

La regola di ribilanciamento potrebbe, ad esempio, prevedere che si dia corso alla riallocazione di portafoglio solo se la differenza percentuale tra E_t e E_t^* supera, in valore assoluto, un certo livello s, ossia se

$$\frac{\left|E_t - E^*_t\right|}{E_t} \geq s \qquad \textbf{[10]}$$

Qualora la differenza sia positiva, occorrerà aumentare l'esposizione all'asset rischioso, viceversa occorrerà ridurla.

L'introduzione di una soglia minima di ribilanciamento consente di ridurre le movimentazioni dettate da oscillazioni di *S* intorno ad un valore centrale. Il guadagno in termini di minori costi di transazione può essere notevole qualora l'attività rischiosa di riferimento si muova in *trading range*, ossia alternando rialzi e ribassi attorno a un valore medio di periodo abbastanza costante. Poiché lo schema CPPI porta a sviluppare un trading di natura trend following (acquistare dopo i rialzi; vendere dopo i ribassi), verrebbero così evitati sia le commissioni legate a continue operazioni di acquisto e vendita tra loro controbilanciatesi, sia le perdite in conto capitale conseguenti all'errato market timing di dette operazioni.

La [10] definisce un intervallo di rendimenti dell'attività rischiosa di riferimento che può essere definito di "non intervento" e che può essere esplicitato in funzione di *s* e *m* nel modo seguente:

$$\Delta\% S \in \left[-\frac{s}{m-1+s\cdot m}; \frac{s}{m-1-s\cdot m} \right] \qquad \textbf{[11]}$$

Qualora le variazioni dell'asset rischioso si mantengono nell'intervallo indicato nella [11], il portafoglio non viene riallocato. Ad esempio, se *m*=3 e *s*=7.5% ne consegue che per variazioni percentuali dell'attività rischiosa di riferimento comprese nell'intervallo -3.37%, +4.23%, ossia $\Delta S \in$ [-3.37, + 4.23%], nessun ribilanciamento viene posto in essere. La [11] tiene conto anche degli effetti conseguenti alle variazioni che possono essere intervenute nel tasso *risk free*.

L'intervallo di non intervento risulta leggermente asimmetrico verso l'alto. Ribilanciare più velocemente nel caso di discesa che in quello di salita tutela nei casi in cui la strategia stia convergendo verso la situazione di stop loss.

Nota la volatilità dell'asset rischioso è inoltre possibile determinare il tempo medio *t* che intercorre tra un ribilanciamento e l'altro per dato parametro di leva, ossia:

$$t = \frac{s^2}{(m-1+m\cdot s)^2 \cdot \sigma^2} \qquad \textbf{[12]}$$

Ad esempio, ipotizzando σ = 20% , *m*=3 e *s*=7.5% risulta *t*=0.0284 (10.36 giorni).

Alternativamente, grazie alla [12], una volta definito *m* e stimata la volatilità del sottostante rischioso, è possibile determinare l'ampiezza dell'intervallo di non intervento in base a un obiettivo di "intervallo medio di ribilanciamento" (*t*).

5.5. Criticità nella definizione dei parametri del CPPI

Non esistono soluzioni precise e predefinite al problema della determinazione dei parametri ottimali di una strategia CPPI. Le scelte finali dipendono dagli obiettivi che si intendono perseguire e dai rischi che si è disposti a sopportare. E' tuttavia essenziale riconoscere che

l'aumento della leva prescelta, *m*, determini un aumento del capture ratio atteso, ma pure dei costi di transazione, della probabilità di default dell'algoritmo e della dispersione del payoff a scadenza

Ci si trova, pertanto, di fronte al problema di ottimizzare un trade off rischio-rendimento la cui soluzione impone la scelta sia di un livello di *m* coerente con la volatilità del sottostante di riferimento, sia di frequenza accettabile delle operazioni di ribilanciamento.

Negli esempi riportati in precedenza, il livello di *m* che consente una cadenza media delle ricomposizioni del portafoglio di circa 10 giorni su un sottostante rischioso con volatilità annua del 20% è pari a 3. Tale livello di *m* comporta l'accettazione di un rischio di *default* dell'algoritmo piuttosto contenuto. Perché lo schema non produca il livello di protezione promesso occorre che in un giorno di contrattazione degli n di durata della protezione, il mercato di riferimento registri una perdita pari al 33.33%.

Qualora la volatilità del sottostante rischioso aumenti, al fine di mantenere inalterata la frequenza di ribilanciamento così come la probabilità che l'algoritmo fallisca occorre diminuire la leva[6].

6. Protective option strategy

Le strategie di assicurazione del portafoglio basate sulle opzioni si distinguono in strategie statiche o dinamiche a seconda che la copertura sia ottenuta mediante l'acquisto di contratti derivati negoziati sui mercati regolamentati o over the counter, piuttosto che in modo sintetico attraverso la gestione dinamica di un portafoglio composto dall'attività rischiosa e da quella priva di rischio in modo da replicare il payoff di un contratto derivato.

La copertura del portafoglio con strategie statiche sono di più semplice realizzazione. L'allocazione iniziale, da determinarsi secondo precise regole derivate dai meccanismi di pricing delle opzioni, resta inalterata sino a scadenza e non sussiste il rischio che per imperfezioni microstrutturali diventi a un certo punto impossibile operare i ribilanciamenti di portafoglio necessari alla replica del payoff dell'opzione.

6.1 Protective Put Strategy (statica)

La *Protective Put Strategy* (*PPS*) rappresenta il primo e basilare schema di portfolio insurance. Questa strategia combina al possesso dell'attività rischiosa l'assunzione di una posizione lunga su un'opzione put sull'attività stessa, con prezzo d'esercizio pari alla quota di capitale che si intende garantire e con scadenza coincidente all'orizzonte temporale della copertura da assicurare.

La strategia è statica giacché dopo questa prima allocazione, l'unico intervento del gestore sarà quello di esercitare o meno l'opzione a scadenza. Qualora l'attività rischiosa abbia mantenuto un valore superiore al prezzo di esercizio della put, ossia superiore al capitale minimo garantito a scadenza, l'opzione non verrà esercitata ed il portafoglio presenterà un rendimento pari a quello realizzato dell'attività rischiosa decurtato dal premio pagato per l'opzione. Se, invece, al termine del periodo considerato il valore del portafoglio sottostante è inferiore allo strike price, il gestore esercita l'opzione put, integrando con i relativi proventi il capitale finale fino a raggiungere la soglia minima promessa.

Il capitale finale prodotto dalla gestione risulta in ogni caso funzione del solo valore dell'attività rischiosa a scadenza e non dall'evoluzione temporale dei suoi prezzi riscontrata nel periodo. La stretagia è, quindi, anche path independent ed è realizzata, in genere, in modo da autofinanziarsi, ossia senza ricorso all'indebitamento per l'acquisto della copertura. Solo una quota *(1-Z)* del capitale iniziale può, pertanto, essere destinato all'acquisto delle azioni. La somma *Z* serve per l'acquisto dell'opzione put con cui garantire il capitale a scadenza (*K*). In questo caso è possibile stabilire il numero di opzioni da acquistare, lo strike price desiderato e le quote da allocare tra azioni e derivati a seconda del livello di copertura che si vuole garantire.

Denominato X^* lo strike price dell'opzione put, avremmo infatti che il prezzo dell'opzione oggi sarà $P_{t0}(S_{t0}, X^*, i, T, \sigma)$, cioè dipenderà dal valore a oggi dell'attività sottostante (S_{t0}), dal prezzo di esercizio (X^*), dal livello dei tassi di interesse (*i*), dalla scadenza (*T*) e dalla volatilità del sottostante (σ).

A scadenza, il valore dell'investimento (I_T) sarà dato da:

$$I_T = (1-Z) \cdot S_T + Z \cdot P_T \qquad \textbf{[13]}$$

$$\text{con } P_T = max(0, X^* - S_T)$$

Nel caso in cui l'opzione a scadenza sia *out of the money* (e quindi il sottostante a scadenza superiore allo strike), l'esposizione del portafoglio alla dinamica dell'attività rischiosa nel periodo risulta pari a (*1-Z*).

Se invece la put scade *in the money*, scatta la protezione da essa offerta. Il suo esercizio deve consentire di ottenere un valore finale del portafoglio pari all'ammontare promesso *K.* Pertanto, definito K il valore del portafoglio coperto, questa condizione definisce lo strike price X^* della put necessario alla copertura, ossia

$$X^* = \frac{K}{1-Z} \qquad \textbf{[14]}$$

da cui si ottiene:

$$Z = \frac{(1-Z)\cdot P_{t0}(X^*)}{S_{t0}} \qquad \textbf{[15]}$$

Utilizzando la [14], la [15] diventa un'equazione nella sola incognita *Z.* Ottenuto Z dalla [15] è possibile, grazie alla [14], fissare il prezzo di esercizio X^*. Se, ad esempio valgono le seguenti condizioni:

i = 4.56%
S_{t0} = 100
T = 5 anni
σ = 20%,

risolvendo numericamente la [15] si ottiene $Z = 0.1052$, $P_{t0} = 11.76$ e $X^* = 111.76$.

Di 1 € di capitale iniziale, si devono, pertanto, investire 0.8948 € nell'attività rischiosa, utilizzando i rimanenti 0.1052 € nell'acquisto di opzioni put con prezzo di esercizio pari a 111.76 € e dal prezzo unitario di 11, 76 €.

La tabella 1 mostra il payoff della strategia per diversi valori del sottostante a scadenza.

Tabella 1: Payoff delle PPS per diversi valori del sottostante a scadenza

ST	80.00	100.00	120.00
X*	111.76	111.76	111.76
PT	31.76	11.76	0.00
1-Z	0.8947	0.8947	0.8947
Valore equity	71.58	89.47	107.37
Valore Posizione Put	28.42	10.53	0.00
Totale	100.00	100.00	107.37

Questa forma di gestione protetta genera un payoff convesso di periodo path indipendent assicurando la partecipazione al rialzo dell'attività rischiosa in una percentuale costante pari a (1-Z) e assicurando un limite massimo alla perdita in caso di ribassi dell'equity.

Nel caso della PPS, i fattori che impattano sul capture ratio sono, oltre al livello di copertura, il livello dei tassi di interesse e la volatilità del sottostante. In particolare, elevati tassi di interesse diminuiscono il prezzo della put, consentendo di aumentare Z. La volatilità del sottostante aumenta invece il premio dell'opzione diminuendo di conseguenza il capture ratio.

6.2 Partecipating Call Strategy

I payoff ottenuti dalla PPS possono essere replicati, grazie alla *put-call parity*, combinando una posizione lunga in opzioni e un titolo zero coupon.

E' possibile costruire una tabella analoga alla 1, che mostra a seconda dell'andamento dell'indice azionario il contributo che ogni componente dà al rendimento dell'investimento: si noti che, con ipotesi identiche allo scenario precedente, il risultato finale non cambia.

Con un tasso del titolo a sconto del 4.56%, un orizzonte temporale di 5 anni, lo ZCB oggi costerà 79.61[7] e quindi 20.39 sarà la quota da destinare all'acquisto delle opzioni call; se lo strike price sarà lo stesso (111.76) e il prezzo delle call 22.78, le opzioni acquistate saranno nuovamente 0.8947 (20.39/22.78) e lo schema sarà così rappresentato:

Tabella 2: Payoff delle PCS per diversi valori del sottostante a scadenza

ST	**80.00**	**100.00**	**120.00**
X*	111.76	111.76	111.76
CT	0	0	8.24
1-Z	0.8947	0.8947	0.8947
Valore bond	100.00	100.00	100.00
Valore Posizione Call	0.00	0.00	7.37
Totale	100.00	100.00	107.37

Anche in questo caso, il capture ratio è influenzato dai tassi di interesse (che impattano sia sul valore del bond che sul costo della call) che dalla volatilità (che aumenta il premio per l'acquisto della call).

Occorre notare che la PCS è la tecnica alla base della costruzione della maggior parte dei prodotti a capitale garantito/protetto commercializzati nel corso degli ultimi anni. In particolare, la maggior parte delle obbligazioni indicizzate e delle polizze Index Linked sono strutturate combinando l'acquisto di un titolo zero coupon con una opzione call. Nel corso degli ultimi anni, con la riduzione progressiva dei tassi di interesse e conseguentemente del margine spendibile per l'acquisto dell'opzione, si è assistito alla proliferazione di strutture via via più complesse, per lo più caratterizzate da opzioni "asiatiche", meno costose delle *plain vanilla*, ma caratterizzate da un capture ratio[8] più elevato.

6.3 Dynamic hedging

Uno schema base di *protective option strategy* richiede l'utilizzo di opzioni con caratteristiche che soddisfano le esigenze dell'investimento da proteggere. Qualora le opzioni desiderate non siano disponibili sul mercato, è possibile replicare il payoff attraverso una strategia dinamica di copertura.

Sotto determinate condizioni, infatti è possibile ricreare la dinamica del valore di un'opzione call ribilanciando continuamente un portafoglio di replica composto da una posizione lunga nell'attività sottostante l'opzione e da un'attività priva di rischio.

La replica dinamica viene attuata tramite continui ribilanciamenti e deve rispettare le seguenti condizioni:

- per piccole variazioni assolute del sottostante, il portafoglio di replica deve pagare lo stesso rendimento dell'opzione call;
- il rendimento di periodo del portafoglio di replica deve coincidere con quello dell'opzione replicata in ogni istante di durata della gestione;
- la strategia attuata non deve richiedere alcun investimento oltre a quello iniziale, dal momento che l'acquisto di un'opzione non comporta altri esborsi oltre il premio iniziale.

Perché sia soddisfatta la prima condizione, il portafoglio necessario a replicare l'opzione deve essere composto da una quantità dell'attività sottostante inferiore all'unità. Il prezzo di una call varia, infatti, nella stessa direzione del prezzo dell'attività sottostante, con una variazione assoluta, però, sempre inferiore[9]. Esso è positivamente correlato alla differenza tra il prezzo del sottostante e il prezzo d'esercizio dell'opzione. Pertanto la quantità di sottostante necessaria per la replica dell'opzione tende a zero se il suo prezzo è inferiore a quello di esercizio dell'opzione e cresce monotonicamente fino all'unità tanto più l'opzione diventa *deep in the money*.

Giacché la sensibilità del valore dell'opzione a quello del sottostante è maggiore di uno in termini di rendimento e minore di uno in termini di variazioni assolute, per soddisfare la seconda caratteristica della replica dinamica occorre che nel portafoglio di replica la posizione nel sottostante sia finanziata in parte con l'assunzione di debito.

Per soddisfare anche la terza condizione, ossia che la gestione dinamica del portafoglio di replica non comporti esborsi oltre a quello di iniziale costituzione, occorre che le variazioni nel sottostante detenute siano controbilanciate da corrispondenti variazioni nel ricorso alla leva. Così, a seguito di un aumento nel prezzo del sottostante, l'incremento del delta dell'opzione impone l'acquisto di ulteriori unità del sottostante da realizzare con l'accensione di ulteriori finanziamenti. Viceversa, a seguito di una diminuzione del valore del sottostante, la diminuzione del delta dell'opzione riduce la quantità di sottostante da detenere e consente un parziale rientro dell'indebitamento.

Alla scadenza, qualora la replica dinamica abbia funzionato perfettamente, se l'opzione fosse in the money, e quindi venisse esercitata, il portafoglio sarebbe composto da una unità di sottostante e da un ammontare da rimborsare pari al prezzo di esercizio dell'opzione. Nel caso l'opzione cessasse di esistere out of the money, il portafoglio di replica non conterrebbe alcuna azione e il debito sarebbe già totalmente rimborsato.

La parametrizzazione di una strategia di portfolio insurance option based è facilmente ricavabile qualora il prezzo delle opzioni avvenga in base alla formula di Black & Scholes il che accade quando:

- il tasso di interesse a breve *r* è conosciuto e costante nel tempo[10];
- il prezzo dell'azione sottostante alla fine di qualsiasi intervallo di tempo finito ha una distribuzione di probabilità lognormale. Ciò implica che la varianza σ^2 del tasso di rendimento dell'attività rischiosa su cui l'opzione è scritta è nota e costante;
- non viene pagato alcun dividendo sull'attività sottostante;
- l'opzione può essere esercitata solo a scadenza, ossia è di tipo europeo;
- non ci sono costi di transazione nel comprare e vendere l'azione o l'opzione;
- si può prendere a prestito qualsiasi frazione del prezzo dell'attività sottostante al tasso di interesse a breve;
- non ci sono penalità se si assume una posizione corta su un'azione.

Sotto queste la seguente formula definisce il prezzo di un'opzione call:

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \qquad \textbf{[16]}$$

dove:

S = prezzo dell'attività sottostante
K = prezzo di esercizio
$(T - t)$ = tempo alla scadenza
r = tasso di interesse annuale di un titolo privo di rischio con scadenza T
σ = volatilità del rendimento dell'attività sottostante
$N(z)$ = funzione di distribuzione normale standardizzata

$N(d_1) = \dfrac{\partial C}{\partial S} = \Delta_{call}$ = *hedge ratio* o rapporto di copertura

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formula rivela come l'acquisto di un'opzione call equivalga a detenere una frazione $N(d_1)$ dell'attività rischiosa sottostante e una frazione $N(d_2)$ di un titolo obbligazionario a sconto privo di rischio con valore nominale K e scadenza T, essendo per definizione $N(d_1)$ e $N(d_2)$ inferiori all'unità.

La *put-call parity* illustra come debba valere la seguente uguaglianza:

$$C + K \cdot e^{-r(T-t)} = P + S \qquad \textbf{[17]}$$

Sostituendo la formula **[16]** nella **[17]** e risolvendo quest'ultima in funzione del prezzo della put si ottiene:

$$P = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) + K \cdot e^{-r(T-t)} - S \qquad \textbf{[18]}$$

$$= S(N(d_1) - 1) + K \cdot e^{-r(T-t)} (1 - N(d_2))$$

Inoltre poiché:

$$-N(-d_1) = N(d_1) - 1 = \frac{\partial p}{\partial S} = \Delta_{put}$$

il prezzo di un'opzione put può anche essere espresso come:

$$P = K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \qquad \textbf{[19]}$$

Si noti che il valore di $N(z)$ è sempre compreso tra 0 e 1. Di conseguenza il numero di unità del sottostante utile a replicare una put è negativo [$-(N(-d_1))$] e inferiore all'unità, mentre la posizione nello zero coupon bond diventa positiva, anche se sempre inferiore all'unità.

Dato che l'assicurazione di un portafoglio si ottiene col possesso dell'attività sottostante assieme ad una put[11], il portafoglio assicurato I soddisferà sempre la seguente uguaglianza:

$$I = S + P \qquad \textbf{[20]}$$

Sostituendo la [19] nella [20] si avrà:

$$I = S \cdot N(d_1) + K \cdot e^{-r(T-t)} (1 - N(d_2))$$

Il portafoglio dinamico equivalente per livello di copertura a una strategia statica di protective put risulta composto da una quota positiva $N(d_1)$ del portafoglio sottostante S, e da una quota anch'essa positiva $(1 - N(d_2))$ di un titolo obbligazionario con valore facciale K e scadenza T. In questo modo si ottiene un portafoglio con un delta pari a $N(d_1)$ che coincide con quello della posizione risultante dalla combinazione dell'investimento azionario, che per definizione ha un delta unitario, e dalla put protettiva con delta pari a $N(d_1) - 1$. Si noti, inoltre, che tale strategia è caratterizzata sempre da una posizione lunga sia sul portafoglio sottostante che sul titolo obbligazionario privo di rischio.

Per replicare sinteticamente il risultato ottenibile attraverso una option based strategy è necessario fare in modo che il delta[12] del portafoglio sia sempre equivalente a quello della posizione di protezione assunta. Tuttavia, la copertura realizzata protegge il valore del portafoglio soltanto istantaneamente giacché il rapporto di copertura $N(d_1)$ si modifica continuamente sia per effetto di variazioni di prezzo dell'attività sottostante che per effetto del trascorrere del tempo.

Il portafoglio deve essere ribilanciato di continuo. A ogni aumento delle quotazioni, che a sua volta determina un incremento del delta complessivo della posizione, occorre far

corrispondere un aumento dell'esposizione sul mercato azionario; l'opposto in caso di riduzione dell'indice azionario.

In teoria questa strategia di dynamic hedging è in grado di assicurare i medesimi risultati ottenibili con l'implementazione di una strategia option based di tipo statico, rendendo possibile l'assicurazione dei portafogli anche in assenza di opzioni sull'attività sottostante.

La perfetta equivalenza, tuttavia, vale solo nella misura in cui gli assunti alla base del modello di Black & Scholes risultano soddisfatte. Nella realtà, pertanto, essa è impossibile realizzarsi a causa di:

- presenza di costi di transazioni nel realizzare la copertura;
- l'attività rischiosa, o i titoli elementari che la compongono, non sono negoziati nel continuo o, anche qualora lo fossero, la loro liquidità fluttua e può temporaneamente venire meno;
- il prezzo dell'attività non si muove in modo continuo, ma può effettuare sbalzi improvvisi da un livello a un altro (salti di prezzo);
- la volatilità dei rendimenti dell'attività rischiosa e i rendimenti sui titoli a reddito fisso non sono costanti ma variano in modo stocastico nel tempo.

L'esistenza di costi di transazione impedisce di procedere a un ribilanciamento continuo del portafoglio, limitando la frequenza delle operazioni di copertura. Gli aggiustamenti delle posizioni in essere possono essere programmati con una cadenza prestabilita oppure in corrispondenza di determinate variazioni di valore del portafoglio sottostante.

È intuitivo che ribilanciamenti meno frequenti riducono l'incidenza dei costi di transazione, ma, al contempo, diminuiscono la *tracking accuracy*, ossia l'accuratezza della replica dinamica del possesso dell'opzione. Al fine di minimizzare i costi di transazione e di poter aumentare la frequenza dei ribilanciamenti, in luogo del sottostante si fa uso di contratti futures scritti sullo stesso, se esistenti. I mercati futures presentano, infatti, costi di negoziazione inferiori. E', però, essenziale che i contratti futures utilizzati costituiscano un mercato fortemente liquido in modo che il market order impact degli ordini trasmessi in esecuzioni dei ribilanciamenti sia limitato e il mercato non sia destabilizzato dall'esecuzione delle strategie di portfolio insurance[13].

Carenze di liquidità e sbalzi improvvisi del prezzo del sottostante possono pregiudicare l'efficacia della protezione dinamica non consentendo variazioni tempestive dell'esposizione del portafoglio in relazione all'andamento del sottostante. Una soluzione parziale a questi problemi può essere l'acquisto di alcune opzioni a breve termine che permettano di limitare le conseguenze del ritardato o impossibilitato ribilanciamento.

La presenza di una volatilità stocastica nei rendimenti del sottostante introduce una consistente alea nel costo dello schema di copertura. Una crescita della volatilità, ad esempio,

aumenta i costi della copertura imponendo più frequenti e massicci ribilanciamenti rispetto a quelli attesi all'inizio (l'equivalente dinamico dei più elevati prezzi delle opzioni in una prospettiva statica). In questo caso, il capture ratio della gestione diventa path dependent.

Infine, per gestire il problema dell'andamento stocastico dei rendimenti dei titoli a reddito fisso occorre inserire in portafoglio quale titolo a reddito fisso uno zero coupon bond la cui scadenza sia identica a quella della protezione accordata dalla gestione[14]. Esso costituisce il *benchmark portfolio* ed è soggetto a variazioni. Di conseguenza il parametro più accurato della volatilità σ è dato dalla volatilità dei valori relativi del portafoglio sottostante e dell'obbligazione di riferimento.

Bibliografia

Black, F., A. Perold, 1992, Theory of costant proportion insurance, *Journal of Economic Dynamic and Control 16*;

Black, F., M. Sholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy 81*;

Cox, J., S. Ross, M. Rubinstein, 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics 7*;

Leland, H., 1999, *L'assicurazione di portafoglio: elementi teorici e applicativi*, Il Mulino, Bologna;

Rubinstein, M., H. Leland, 1981, Replicating options with positions in stock and cash, *Financial Analysts Journal July-August*.

Note

[#] Il lavoro rientra in una ricerca più ampia che ha goduto del supporto finanziario del MIUR.
[*] San Paolo WM Lux
[**] Università Cattaneo LIUC, Castellanza (VA)

[1] Un investimento effettuato in un fondo azionario che investe nei mercati internazionali e che adotta come benchmark il MSCI World (in dollari US) dal 28/03/02 al 31/7/02 avrebbe perso il 19.82%, attivando dopo soli quattro mesi l'ordine di stop loss.

[2] Come nelle strategie discusse in precedenza, il livello del floor dipende dalla dinamica dei tassi di interesse.

[3] Come risulta dalla [4], E_t potrebbe avere ammontare superiore al valore del portafoglio al tempo *t*, nel qual caso la strategia implicherebbe una percentuale investita in attività rischiosa superiore al 100% e un indebitamento nel titolo risk free. Tale condizione non è però di facile attuazione e quindi, in genere, si vincola la percentuale allocabile nell'attività rischiosa all'intervallo [0,1].

[4] Dimostrazione disponibile presso gli Autori.

[5] Dimostrazione disponibile presso gli Autori.

[6] La relazione tra *m* e volatilità per dati tempo di ribilanciamento puo' essere ottenuta invertendo la [12].

[7] Con capitalizzazione continua 79.61=100*exp(-4.56%*5).

[8] A titolo di esempio, si confronti una call plain vanilla sull'indice Eurostoxx con una opzione call che a scadenza paga la media delle rilevazioni mensili dell'indice. La distribuzione a scadenza dei valori dell'opzione asiatica sarà sicuramente inferiore rispetto a quella plain vanilla, il che si rifletterà su un costo minore della prima rispetto alla seconda. Questo consente di vendere la struttura "con opzione asiatica" come a più alto upside potential: in realtà essa è scritta su un sottostante a minor volatilità e quindi anch'esso con potenzialità di incremento mediamente più limitate.

[9] In gergo tecnico, il delta della call è sempre compreso tra zero e uno.

[10] Se il titolo privo di rischio è un titolo obbligazionario a sconto, quale ad esempio un *Treasury Strip,* e la sua scadenza coincide con quella dello schema di *PI,* quanto supposto da *Black & Scholes* può essere generalizzato così da permettere al tasso di interesse privo di rischio di fluttuare nel tempo secondo un andamento casuale. Perciò, la volatilità è data dalla volatilità del prezzo del portafoglio sottostante rispetto al valore del titolo obbligazionario privo di rischio.

[11] Il che equivale, come già analizzato in precedenza, al possesso di un titolo obbligazionario e di una opzione call.

[12] Il delta è il principale indicatore di sensitività di una posizione comprendente opzioni e misura la reattività del valore del portafoglio al variare del valore di mercato dell'attività sottostante. Con più precisione il delta di un'opzione è definito come derivata prima del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'*underlying asset* e corrisponde alla pendenza della curva che lega il prezzo dell'opzione a quello dell'attività sottostante. Ne segue che le posizioni rialziste, individuate da una posizione lunga su una call o corta su una *put,* hanno un delta positivo compreso tra *0* e *1* tanto maggiore quanto più la posizione risulta in the money*,* mentre quelle ribassiste, generate da una posizione lunga su una put o corta su una call*,* hanno un delta negativo compreso tra *–1* e *0.* Il delta del portafoglio si calcola semplicemente come somma dei coefficienti relativi alle singole posizioni che lo costituiscono, a prescindere dalla loro incidenza sul portafoglio complessivo.

[13] Si veda Brennan, Schwartz (1989); Gennotte, Leland (1990); Besak (1995); Grossman, Zhou (1996) per una riflessione completa sull'impatto della *PI* sulla stabilità del mercato.

[14] In proposito si veda Margrabe (1978).